TOMO XLIV (A) Núms. 5 y 6. - MAYO - JUNIO 1948

ANALES
DE LA
REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FISICA Y QUIMICA

SERIE A — FISICA

ORGANO DE LOS INSTITUTOS DE FISICA DEL
CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

SUMARIO

Páginas

NOTAS

ACTAS Y REVISTAS

TODA LA CORRESPONDENCIA, TANTO CIENTIFICA, COMO ADMINISTRATIVA, DEBE DIRIGIRSE A **REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FISICA Y QUIMICA.**—FACULTAD DE CIENCIAS, SECCION DE FISICA.—TELEFONO 23-80-96 (CIUDAD UNIVERSITARIA)

16. INFLUENCIA DE LA ABERRACION MONOCROMATICA DE APERTURA EN LA MIOPIA NOCTURNA, *por* J. M. OTERO, L. PLAZA Y M. RÍOS.

SUMMARY

The spherical aberration of the eye was at the beginning considered as the principal cause of night myopia. Later research, carried out by the investigators of the school of Madrid, established that the above mentioned cause was but very little responsible for the phenomenon. Lately, Tourey in America, basing himself on results obtained with a new technique which he has worked out, considers that hypothesis anew. The authors have, therefore, carried out a series of experiments using monochromatic light and artificial pupils of various diameters in orden that the contribution of the aberration to night myopia might be determined.

Results prove, beyond all doubt, that the values for night ametropia hardly vary for the whole series of different pupilary openings, the small variations observed being of the opposite sign, that is to say, night myopia shows a tendency to decrease as the pupilary diameter increases.

I. INTRODUCCIÓN

El ojo, al pasar de la visión a plena luz a la visión con niveles luminosos bajísimos, sufre una serie de modificaciones que al cambiar sus propiedades dióptricas pueden ser causa de la Miopía Nocturna:

1.ª *Aberración cromática del ojo combinada con el efecto de Purkinje.*—Como se sabe el ojo tiene una aberración cromática longitudinal que provoca una diferencia de enfoque entre los extremos rojo y violeta del espectro de dos dioptrías, aproximadamente. El ojo tiene tendencia a enfocar sobre la retina, a plena luz, la longitud de onda de 5.550 A, siendo, pues, ligeramente hipermétrope para el extremo rojo y francamente miope para el violeta por la mayor dispersión en esta zona espectral.

Como quiera que la sensibilidad espectral máxima se desplaza del amarillo limón (5.550 A) al verde azulado (5.090 A) al pasar de plena luz a estímulos luminosos muy escasos, la diferencia espectral de 460 A origina una pequeña miopía que contribuye a la Miopía Nocturna. La cuantía de tal aportación la fija Cabello en 0,5 (1) y Wald en 0,35 a 0,40 (2), siendo así que el valor medio de la Miopía Nocturna es de dos dioptrías, aproximadamente.

2.ª *Cambio de forma del cristalino, abombándose al pasar de la visión a plena luz a la visión nocturna.*—El cristalino parece

aumentar su potencia al pasar de la visión diurna a la nocturna, bien por adquirir su forma natural, lo que parece más probable (3), bien por tender a adquirir la forma que da la aberración esférica mínima (4) y (5). Tal aumento de potencia ocasionaría una miopía del orden de 1,25 dioptrías (6), que no se presenta en présbitas fuertes ni en operados de cataratas (4) y (6).

3.ª *Dilatación de la pupila del ojo al pasar a visión nocturna.*— Al dilatarse la pupila y entrar en juego zonas marginales del cristalino ha de cambiar lógicamente el plano óptimo de proyección, cambio que estará condicionado al valor de la aberración esférica del ojo para las zonas marginales de aquél.

Si el ojo fuese un sistema centrado de dioptrios esféricos convergentes, la aberración esférica tendría el carácter de aberración esférica simple, esto es, de cuantía negativa creciente con la altura de incidencia (subcorrección) y el plano óptimo de proyección se desplazaría cada vez más hacia el centro del ojo provocando una miopía creciente con el tamaño de la pupila.

Este fué el mecanismo sencillo que los descubridores de la Miopía Nocturna dieron como explicación previa del fenómeno (7) abandonándola después. Esta hipótesis, sugestiva por su simplicidad, es recogida de nuevo teóricamente por Palacios (8) y recientísimamente por Tousey y Koomen (9) y (10), quienes experimentalmente postulan que la aberración esférica del ojo, para las grandes aperturas pupilares de la visión nocturna, origina un cambio del plano de proyección de la imagen en el sentido de la miopía que, a juicio de los autores, justifica 1,75 dioptrías de la Miopía Nocturna observada, achacando el resto a la aberración cromática combinada con el efecto de Purkinje.

Otro posible efecto de la dilatación de la pupila es, según Ronchi (11), una variación de la presión en la cámara anterior del ojo en el sentido de que al dilatarse el iris, y retirarse, por tanto, a la periferia de la cámara, se origina una depresión en ella que se compensa por un ligero avance del cristalino, avance que por sí solo puede explicar la parte más importante de la Miopía Nocturna, cuya causa la mayoría de los autores hacen residir en el cristalino.

Como quiera que los resultados de Tousey y colaboradores están en completo desacuerdo con los de la escuela de Madrid, así como con los de Ivanoff (5) y Wald (2), parece oportuno estudiar

directamente la influencia de la aberración esférica del ojo en la Miopía Nocturna eliminando en lo posible las otras concausas, es decir, dejando actuar sola la variable diámetro de pupila.

Pero antes de dar cuenta de nuestra técnica experimental y resultados, examinaremos brevemente las particularidades de la aberración esférica en el ojo humano.

II. Aberración esférica del ojo

El ojo no es en modo alguno un sistema centrado ni sus dioptrios están limitados por superficies esféricas. Singularmente la córnea es un paraboloide casi centrado sobre el eje óptico. El cristalino tiene un índice decreciente del centro a la periferia, lo que juntamente con la menor curvatura de las zonas marginales del cristaloide ha de producir una convergencia mucho menor de los rayos de las zonas periféricas de la que ocurriría en una lente, limitada por superficies esféricas, de potencia igual a la media del cristalino. Esta menor refracción del borde cristaliniano se acentúa en el proceso acomodativo, habiendo señalado Tscherning un cambio de signo en la aberración al pasar de la visión a infinito a la visión a cortas distancias.

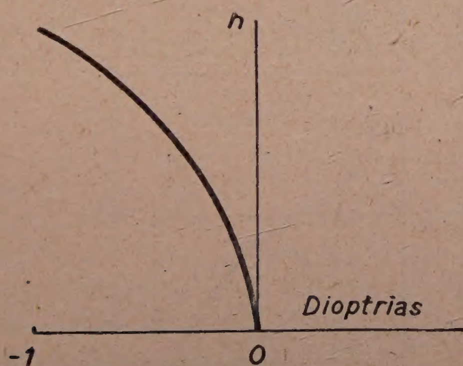


Figura 1

Todos estos hechos de carácter anatómico incontrovertible nos permiten afirmar *a priori* que la aberración esférica del ojo no tiene por qué coincidir con la de un sistema centrado equivalente que por tratarse de una sucesión de sistemas convergentes en contacto y de índices poco distintos daría lugar a un tipo de aberración esférica subcorregida análogo al de una lente sencilla aislada (fig. 1).

Pocas son las medidas directas realizadas de la aberración esférica del ojo. Las más antiguas y ya clásicas son las de Ames y Proctor (12), quienes operando con luces monocromáticas obtienen curvas de aberración, que indican que la aberración esférica crece bruscamente para pequeñas aperturas pupilares, tendiendo a pasar para las grandes a un estado de sobrecorrección que originaría que a partir de un pupila de 3 mm. se altere poco por compensarse unas zonas con otras.

Sin embargo, estas medidas no permiten concluir nada definitivo sobre la influencia de la aberración esférica en la posición del plano de enfoque para distintos tamaños pupilares, ya que, aparte de que el método puede conducir a errores por fundarse en la individualización material siempre difícil, de pinceles luminosos en la zona a estudiar y la paraxial, las medidas se limitaron a dos observadores y a zonas a 3 mm. del eje, como máximo. El resultado que obtienen para uno de los observadores y para $\lambda = 5.890$ A, esto es, la misma que usamos en nuestras experiencias, va representado en la figura 2.

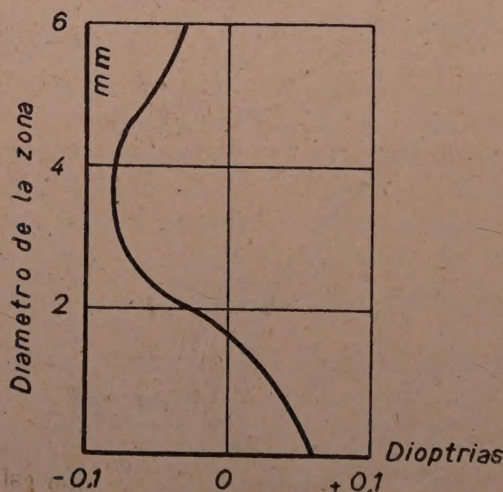


Figura 2

Otras medidas las realiza Ivanoff (5) empleando luz dirigida y distintas acomodaciones, llegando a resultados que se resumen en la figura 3. En ella se ve, que de acuerdo con Tscherning, la aberración esférica varía grandemente para la mayoría de los observadores de acuerdo con la distancia del objeto (acomodación) pasando

de la subcorrección (aberración práctica) a la sobrecorrección. La aberración presenta un aumento brusco para tamaños pupilares hasta 1 mm. o ligeramente superior, permaneciendo estacionaria a partir de 2 mm. que *es el mínimo tamaño pupilar que tiene el ojo humano para altísimos niveles luminosos*. Así, pues, según las medidas

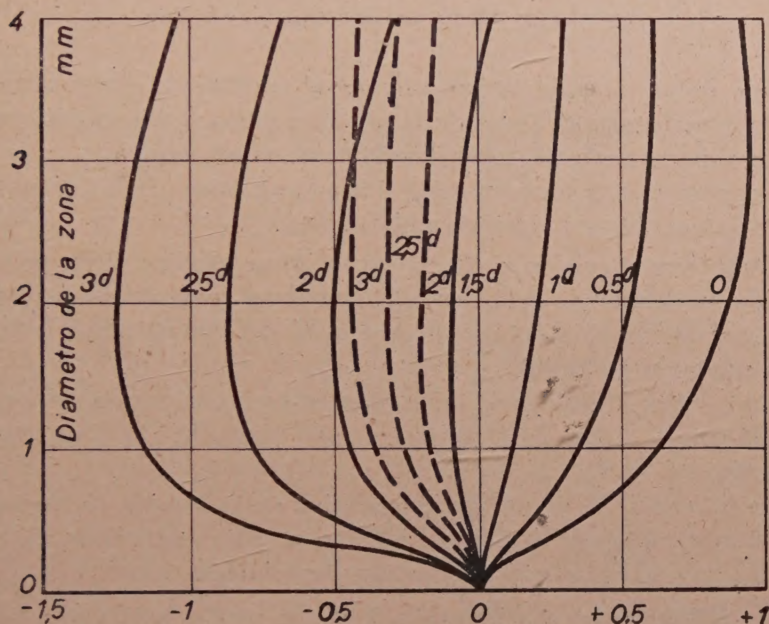


Figura 3

de Ivanoff, la aberración esférica no ejerce influencia apreciable en el estado refractivo del ojo en las variaciones normales de tamaño pupilar, si bien es preciso considerar que el autor francés limita sus medidas a un tamaño máximo de la pupila de 4 mm. y, aun cuando la marcha de las curvas permite suponer que la variación para las grandes pupilas, no ha de ser grande, las particularidades de las zonas cristalinianas exteriores que hemos señalado, impiden hacer afirmaciones rotundas sin datos experimentales directos sobre su comportamiento.

Por otra parte, Ivanoff ha encontrado que un grupo grande de observadores presenta aberraciones esféricas mucho más pequeñas para cualquier estado acomodativo (líneas de puntos en la figura 3).

Tousey y colaboradores (9) y (10) encuentran valores variables de 0,75 a 1,50 dioptrías para el borde y, de acuerdo con Ivanoff,

comprueban que la aberración esférica cambia con la acomodación en el sentido de pasar de la subcorrección a la sobrecorrección al crecer aquélla.

III. Medida directa de la influencia de la aberración de apertura en la Miopía Nocturna

Por Miopía Nocturna entendemos el cambio de refracción que el ojo experimenta al pasar de la visión a plena luz, con manantiales de reparto espectral aproximadamente equienergéticos, a la visión con niveles luminosos de la misma naturaleza física, pero con flujo de energía próxima al umbral.

Dado que la visión a plena luz origina pupilas cuyo tamaño mínimo no desciende de 1,9 mm., tomaremos como origen en nuestras medidas experimentales la pupila de ese tamaño, fijándolo en 2 en números redondos.

Para evitar la influencia de la aberración cromática del ojo combinada con el efecto de Purkinje, hemos usado luz monocromática de sodio.

La influencia de la aberración esférica en la Miopía Nocturna la hallaremos midiendo ésta con distintas pupilas artificiales, de 2 a 8 mm., y viendo las variaciones que experimente.

a) *Dispositivo experimental.*—Usamos visión monocular y observación de la mira a través de un anteojo y colimador (fig. 4), técnica instrumental ya usada por nosotros en otras investigaciones sobre ametropías nocturnas y de eficiencia comprobada, poseyendo ambos aparatos una aberración esférica y cromática despreciables.

Anteojo y colimador fueron puestos en condiciones rigurosamente telescópicas. Mediante el iris colocado delante del objetivo del primero se regulaba el tamaño de su pupila de salida que coincidía, mediante mentonera adecuada, con el plano de la pupila del ojo diafragmándola artificialmente.

Se comprobó primeramente que la variación de esta pupila en el instrumento no provocaba ningún cambio en el enfoque de la mira. Esta, cuya forma va indicada en la parte izquierda de la figura, subtenía ángulos de $=3'$ campo aparente en los detalles finos y 12′ en los gruesos. Dicha mira podía girar en su montura con sistema de trinquete movible que permitía fijarla en cualquiera de las posiciones de arriba, abajo, derecha e izquierda. Su ilumi-



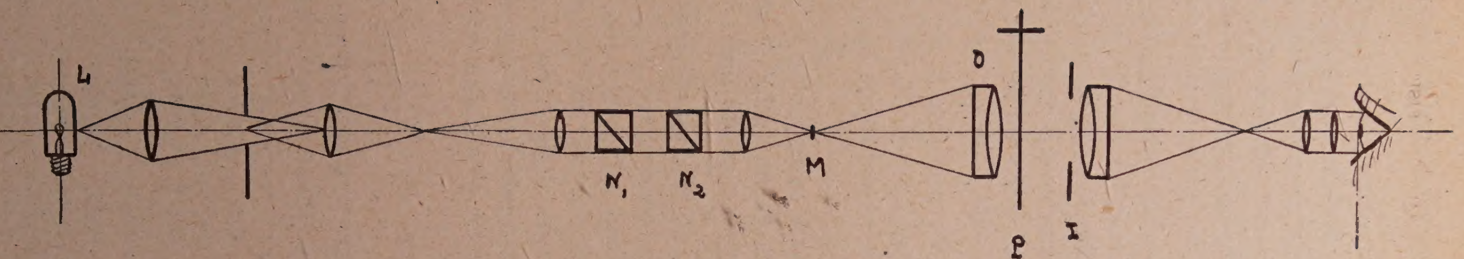


Figura 4

nación se obtenía mediante una lámpara de sodio y un sistema óptico análogo al de Köhler. La lámpara, alimentada por batería de alta capacidad, tenía un régimen de descarga constante contrastado mediante un voltímetro de precisión. La disminución del flujo se conseguía mediante un sistema de nícoles, cuyo ángulo de cruzamiento se leía en un limbo graduado.

b) *Técnica de las medidas.*—Se utilizaron seis observadores normales o ligeramente miopes, ametropia que se tuvo en cuenta. El tiempo de adaptación fué de media hora. El criterio para obtener la Miopía Nocturna era determinar la mínima cantidad de luz precisa para percibir, con un 60 por 100 de respuestas certeras, la posición del radio que falta del círculo interior.

Para ello, al observador se le iba disminuyendo mediante cruce de los nícoles el esplendor de la mira, observando al mismo tiempo el porcentaje de juicios certeros que emitía al ser interrogado por la posición de la mira.

Durante los cambios de posición se obturaba el colimador mediante una pantalla escamoteable P para evitar cualquier sugestión por percepción del sentido de giro.

c) *Resultados obtenidos.*—Siguiendo la técnica indicada se determinó para cada observador y cada diámetro pupilar (desde 2 a 8 mm.) el mínimo esplendor necesario para percibir el detalle fino de la mira en función de las dioptrías que se ponían en el ocular del anteojo de observación desde 0 a —2.

En la tabla se resumen los resultados obtenidos indicando los valores medios de los alcanzados para cada uno de los seis observadores.

TABLA I

Pupilas / Dioptrías	2 mm	3 mm	4 mm	5 mm	6 mm	7 mm	8 mm
0	0,273	0,225	0,157	0,151	0,208	0,216	0,216
—0,25	0,248	0,190	0,119	0,125	0,159	0,143	0,142
—0,50	0,212	0,173	0,096	0,107	0,116	0,119	0,119
—0,75	0,192	0,153	0,086	0,087	0,101	0,101	0,102
—1,00	0,181	0,133	0,079	0,082	0,079	0,086	0,086
—1,25	0,164	0,120	0,074	0,082	0,078	0,088	0,091
—1,50	0,163	0,116	0,079	0,082	0,079	0,090	0,094
—1,75	0,183	0,128	0,106	0,106	0,104	0,106	0,106
—2,00	0,220	0,165	0,143	0,144	0,123	0,128	0,128

De esta tabla puede deducirse la posición del plano de proyección para cada diámetro pupilar y, por tanto, su variación en función de la de éste. El resultado puede verse en la figura 5.

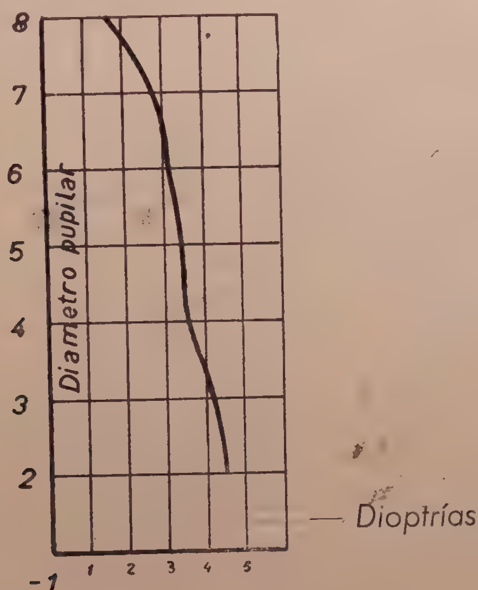


Figura 5

No obstante, dadas las diferencias observadas en la marcha de la variación del plano de proyección de observador a observador, en la figura 6 están representadas las curvas de variación para cada uno de aquéllos.

En estas curvas es interesante observar que en su primera parte (hasta diámetros pupilares de 4 a 5 mm.) todas ellas tienen una marcha semejante, es decir, el plano de proyección se desplaza en todos los observadores hacia atrás, lo que coincide con las medidas de la aberración esférica de Ames y Proctor e Ivanoff, ya que según éstas el ojo tiende a sobrecorregirse ligerísimamente en esta zona (figs. 2 y 3). A partir de aquí, sin embargo, las cosas se complican, ya que puede verse que en tres de los observadores el plano de proyección continúa desplazándose en el mismo sentido, pero en los otros tres éste se invierte corriéndose de nuevo hacia delante, sin sobrepasar, no obstante, la posición que tenía para la pupila de 2 mm. Este resultado no puede compararse con el valor de la aberración esférica en estas zonas, ya que las medidas antes ci-

tadas se limitaron a diámetros pupilares de 4 a 5 mm., pero parece indicar que el estado de corrección del ojo para dichas alturas de incidencia puede cambiar de signo con el observador.

Por lo que se refiere a la influencia que la aberración monocromática de apertura pudiera tener en la Miopía Nocturna entre los

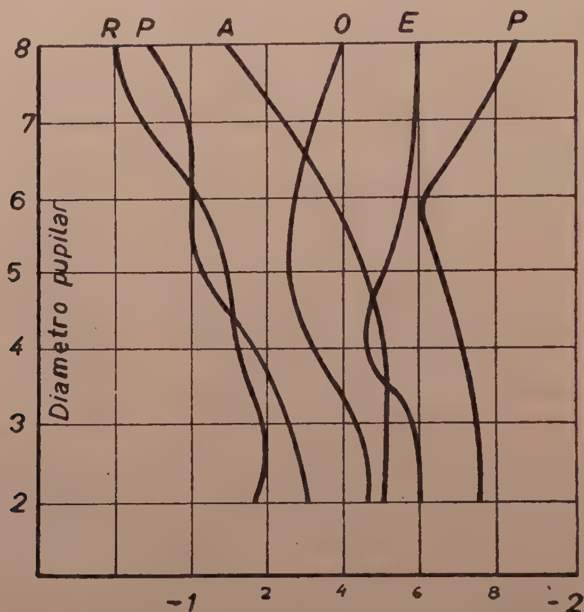


Figura 6

límites de variación de la pupila de entrada del ojo, esto es, de 2 a 8 mm., de la tabla y figuras deducimos:

1.° Para el promedio de observadores la variación máxima en la Miopía Nocturna es de 0,3 de dioptría *en el sentido de disminuir esta anomalía,* es decir, que la Miopía Nocturna es mayor para las pequeñas pupilas que para las grandes.

2.° La variación máxima observada fué de 0,4 de dioptría en dicho sentido y en tres de los observadores es prácticamente nula.

3.° Los resultados concuerdan con las medidas de Ivanoff y la hipótesis de que el cristalino está acomodado a menos dioptría y media en visión nocturna, ya que en tal estado acomodativo la aberración esférica es mínima.

4.° La cuantía de la Miopía Nocturna observada para el diámetro pupilar de 8 mm. es de 1,2 dioptrías como media de los seis

observadores, lo que era de esperar, ya que suprimimos la aportación de la aberración cromática del ojo combinada con el efecto Purkinje, cuya cuantía media, según indicamos antes, es de 0,5 dioptrías y, además, el ojo no enfoca normalmente las 5.893 A de la luz del sodio, sino 5.550 A, con lo que la ligera hipermetropía cromática resultante tiende a disminuir en otras 0,2 dioptrías la cuantía de la Miopía Nocturna. Llegamos con ello a 1,9 - 2 dioptrías como la cifra más frecuente según la mayoría de los investigadores.

Los resultados obtenidos no prejuzgan nada sobre la causa fundamental de la Miopía Nocturna que nosotros localizamos en el cambio de forma del cristalino y Ronchi en el avance del mismo, pero tratan de poner en evidencia que, sea cual fuere este mecanismo, la aberración monocromática de apertura es un factor de mínima importancia, no confirmándose, por tanto, los resultados de Tousey.

Dado que las pocas medidas directas publicadas de la aberración esférica del ojo no llegan más que hasta 6 mm. escasos de diámetro pupilar, quedando fuera la zona tal vez interesante del cristalino, hemos tratado de determinar a plena luz su efecto sobre el plano de proyección.

Para ello era preciso dilatar artificialmente la pupila mediante un fármaco que provocase midriasis sin actuar sobre la acomodación. Tal ocurre, según parece, con la adrenalina.

Realizadas las medidas para un observador en el que se obtuvo una dilatación pupilar superior a 8 mm., éstas dieron el resultado indicado en la figura 7.

Vemos que es este caso, al pasar de 2 a 8 mm. tampoco el plano de proyección ha cambiado en más de 0,3 dioptrías, si bien las variaciones zonales son mucho mayores.

En prevención a que la adrenalina, además del efecto de midriasis pudiese cambiar también el estado de refracción del ojo y, por tanto, también, su aberración esférica, se repitieron las medidas con el mismo observador y ojo normal hasta el tamaño de pupila posible. El resultado obtenido está indicado en la curva 11 de la figura 7 y nos indica que la adrenalina convirtió el ojo en ligeramente hipermétrope y exageró en esta zona el desplazamiento del plano de proyección. Por ello es preciso mirar con desconfianza los resultados obtenidos con ojos sometidos a la acción de fármacos y no generalizar estos resultados a ojos normales.

Prescindiendo de esto, es sin embargo notable la semejanza entre la curva 1 y la obtenida para el mismo observador en visión noc-

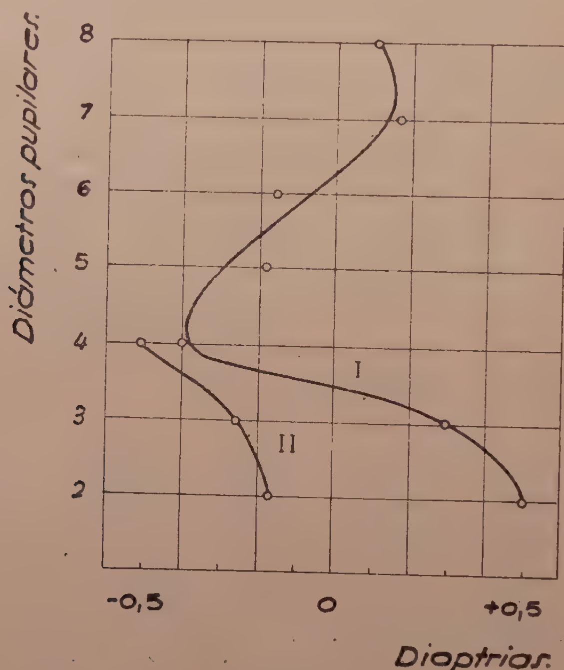


Figura 7

turna (P de la figura 6), dando ambas los cambios en el mismo sentido pero menos acentuados en esta última.

BIBLIOGRAFIA

(1) CABELLO.—ANALES DE FÍS. Y QUÍM., XLI, 439, 1945.
(2) WAL Y GRIFFIN.—*J.O.S.A.*, 37, 321, 1947.
(3) J. M. OTERO.—*Atti della Fondazione Giorgio Ronchi*, año II, núm. 5 y 6, 3, 1947.
(4) OTERO Y DURÁN.—AN. FÍS. Y QUÍM., XXXVIII, 236, 1942.
(5) IVANOFF.—*Rev. d'Optique*, 26 p. 145, 1947.
(6) CABELLO.—AN. FÍS. Y QUÍM., XLI, 449, 1945.
(7) OTERO Y DURÁN.—AN. FÍS. Y QUÍM., XXXVII, p. 459, 1941.
(8) J. PALACIOS. *Investigación y Progreso*, sept. y oct., 1943.
(9) M. K. KOOMEN Y R. TOUSEY.—*Reunión de Montreal de la American Physical Society*, junio 1947.
(10) M. J. KOOMEN Y R. TOUSEY.—*J.O.S.A.*, 37, 992, 1947.
(11) RONCHI.—*Atti. Fund. Giorg. Ronchi*, 1948.
(12) AMES Y PROCTOR.—*J.O.S.A.*, XX, 1921.

17. DISTRIBUCION DE LUZ EN UN PLANO DE FRENTE, EN PRESENCIA DE ABERRACION ESFERICA DE TERCER ORDEN,

por C. MORAIS Y J. CASAS

SUMMARY

By expanding into series of powers the spherical aberration in centered systems, the authors study the caustic for the third order.

They also study the ilumination produced on a frontal plane, by the luminous energy that reaches an elementary zone of the caustic.

Finally, keeping inside the limits establised for the third order, the authors arrive at those functions which control the distribution of luminous energy and of ilumination, taking into account the superposition of the different zones which contribute to the phenomenon.

1) Partimos en este trabajo del desarrollo en serie de potencias de la aberración esférica para la última superficie de un sistema centrado, que puesta en función del ángulo de inclinación, $\tilde{\sigma}'_s$, del rayo emergente es

$$\Delta S'_s = a\,\tilde{\sigma}'^2_s + b\,\tilde{\sigma}'^4_s + c\,\tilde{\sigma}'^6_s + \ldots \qquad [1]$$

Si en ésta tomamos en lugar de $\tilde{\sigma}'_s$ su tangente, la [1] tomará la forma

$$\Delta s'_s = a \operatorname{tg}^2 \tilde{\sigma}'_s + b' \operatorname{tg}^4 \tilde{\sigma}'_s + c' \operatorname{tg}^6 \tilde{\sigma}'_s + \ldots \qquad [2]$$

conservándose el primer coeficiente del desarrollo, ya que dentro del tercer orden puede sustituirse el arco por su seno o tangente.

Consideremos (fig. 1), la meridiana de la cáustica de un sistema centrado, que vamos a referir al eje óptico como eje de las x y a su perpendicular por el foco paraxial, F'_p, como eje y.

Sea (x, y) un punto de la cáustica. De la figura se deduce inmediatamente

$$x \operatorname{tg} \tilde{\sigma}'_s = y - \Delta s'_s \operatorname{tg} \tilde{\sigma}'_s \qquad [3]$$

que es la ecuación general del rayo refractado, tangente a la cáustica en el punto (x, y), con parámetro $\operatorname{tg} \tilde{\sigma}'_s$. Eliminando por derivación para hallar la envolvente, tenemos

$$x = \frac{d\,\Delta s'_s}{d \operatorname{tg} \tilde{\sigma}'_s} \operatorname{tg} \tilde{\sigma}'_s + \Delta s'_s \qquad [4]$$

Derivando la [2] se obtiene $\frac{d\,\Delta s'}{d\,\mathrm{tg}\,\tilde{\sigma}'_s}$, y con esto, teniendo en cuenta las [3] y [4], obtenemos como ecuaciones paramétricas de la cáustica

$$x = 3\,a\,\mathrm{tg}^2\,\tilde{\sigma}'_s + 5\,b'\,\mathrm{tg}^4\,\tilde{\sigma}'_s + 7\,c'\,\mathrm{tg}^6\,\tilde{\sigma}'_s + \ldots$$

$$y = 2\,a\,\mathrm{tg}^3\,\tilde{\sigma}'_s + 4\,b'\,\mathrm{tg}^5\,\tilde{\sigma}'_s + 6\,c'\,\mathrm{tg}^7\,\tilde{\sigma}'_s + \ldots \qquad [5]$$

Si tomamos los primeros términos de los segundos miembros, esta-

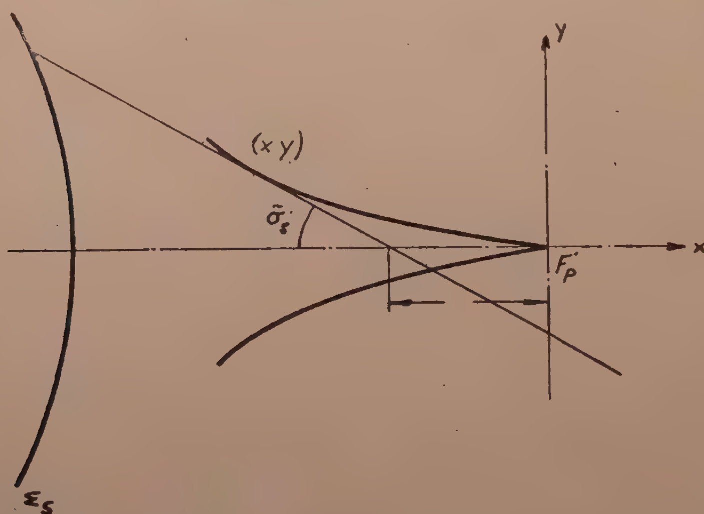


Figura 1

remos en la zona de tercer orden, y, eliminando el parámetro, tenemos para la cáustica la ecuación cartesiana

$$y^2 = \frac{4}{27\,a}\,x^3, \quad \text{o bien,} \quad y^2 = cx^3, \quad \text{siendo,} \quad c = \frac{4}{27\,a} \qquad [6]$$

que como se ve es la de una parábola semicúbica con un retroceso de primera especie en el foco paraxial.

La tangente en un punto de coordenadas $(x,\ y)$ vendrá dada por la ecuación

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{cx_0}\,(3\,x - x_0) \qquad [7]$$

en el supuesto de ser un sistema subcorregido. En el caso de ser sobrecorregido, la ecuación de la tangente sería

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{c x_0}\,(x_0 - 3x) \qquad [8]$$

Hallemos la intersección de la tangente con la propia cáustica, para lo cual resolveremos el sistema formado por las [6] y [7], con lo que se llega a la ecuación

$$x^3 - \tfrac{9}{4} x_0\, x^2 + \tfrac{3}{2} x_0^2\, x - \tfrac{1}{4} x_0^3 = 0 \qquad [9]$$

la cual admite la raíz $x = x_0$ doble, como era de esperar, y además

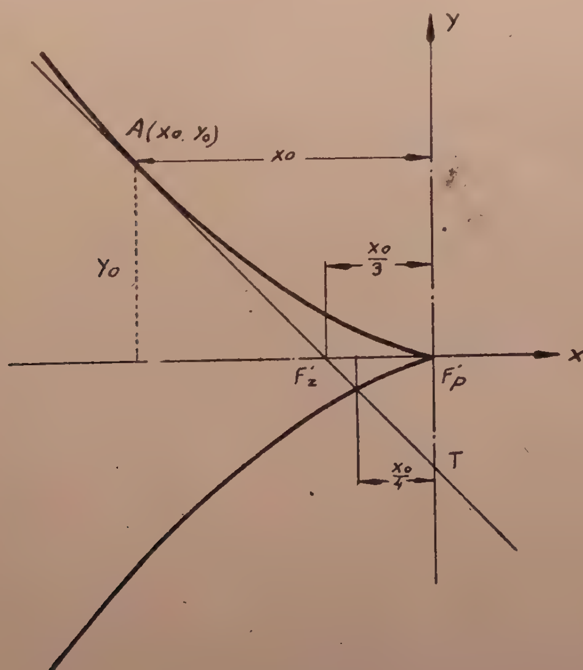


Figura 2

la $x = \frac{1}{4} x_0$. La primera pertenece al punto de contacto de la tangente, A, y la segunda al punto B, de intersección con la otra rama. Haciendo en la [7] $y=0$, obtenemos para el punto de intersección de la tangente con el eje la abscisa

$$x = \frac{x_0}{3}$$

De lo que antecede y por la consideración de semejanzas en la figura 2, deducimos que la aberración esférica longitudinal de un rayo es la tercera parte de la abscisa de tangencia con la cáustica. Que la aberración transversal es la mitad, cambiada de signo, de la ordenada de dicho punto de contacto. Y que la mínima sección de la cáustica correspondiente a una cierta apertura tiene una abscisa igual a tres cuartos de la aberración esférica del rayo marginal con un radio igual a la cuarta parte de la aberración transversal de dicho rayo.

2) Para estudiar la distribución de luz en un plano de frente, cuya traza sobre el dibujo sea la recta $x=k$, consideremos (fig. 3)

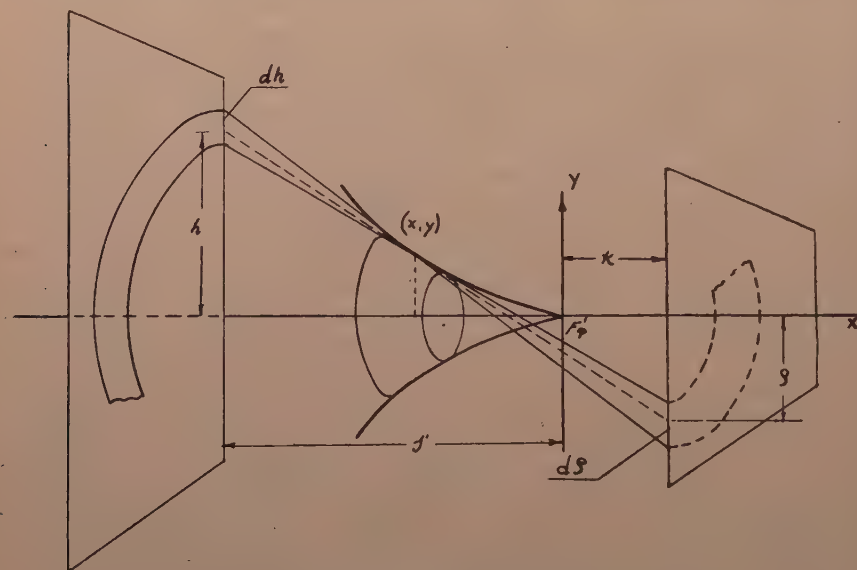


Figura 3

una zona de salida del sistema de altura media h y amplitud dh. Esta corona circular se transforma en una banda sobre la cáustica comprendida entre las circunferencias de contacto con los conos de rayos que limitan la corona de salida, y estos mismos conos producirán en el plano de frente $x=k$ otra corona circular de radio medio ρ y amplitud $d\rho$.

Fijada por sus elementos de determinación la corona circular de salida, queda perfectamente determinada la banda sobre la cáustica, y si fijamos el plano de frente, queda también determi-

nada en él la corona circular correspondiente. El radio medio de esta corona vendrá dado por la intersección de la tangente a la cáustica en el punto (x, y) con la recta $x=k$, que deducido de la [7] nos da para el valor de ρ

$$\rho = \tfrac{1}{2}\sqrt{cx}\,(3k - x), \quad \text{o bien,} \quad \rho = k\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3a}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{27a}} \qquad [10]$$

Si fijado el punto de tangencía (x, y), es decir, fijado el rayo medio hacemos variar la posición del plano de frente, iremos obteniendo diferentes valores para ρ.

Para $k=0$, es decir, el plano pasando por el foco paraxial, se obtiene $\rho = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{27a}}$ que es el valor de la aberración tranversal del rayo considerado. Para $k=\frac{x}{3}$, obtenemos $\rho=0$.

Cualquiera de las [10] nos doce que la correspondencia entre ρ y k es lineal.

Si en lugar de fijar el punto de tangencia del rayo con la cáustica y hacer variar k, dejamos fijo k y hacemos variar x, la segunda de las [10] nos dice que ρ varía según la diferencia entre las ordenadas de una parábola ordinaria, cuyo parámetro depende de la posición del plano de frente, y las de una parábola semicúbica, que no depende de la posición del plano. Si ponemos

$$\rho_1 = k\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3a}}, \qquad \rho_2 = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{27a}}$$

tenemos

$$\rho = \rho_1 - \rho_2$$

Como puede verse fácilmente, para $x=0$ y $x=3k$ el radio ρ se anula como era de esperar, ya que al valor $x=0$ corresponde como rayo tangente a la cáustica el eje del sistema, y para $x=3k$ corresponde un rayo cuya aberración longitudinal es k y, por tanto, pasa por el punto de intersección de plano con el eje.

Para $k<x<3k$, se conserva positivo con un máximo en este intervalo, que corresponde al valor $x=k$, para el cual

$$\rho = \sqrt{\frac{4}{27a}}\,k^{\frac{3}{2}}$$

Para $x > 3k$, cambia de signo y aumenta en valor absoluto al aumentar x.

En la figura 4 se representa gráficamente la variación de ρ como diferencia entre las ordenadas de las curvas $\rho_1 = 0$ y $\rho_2 = 0$.

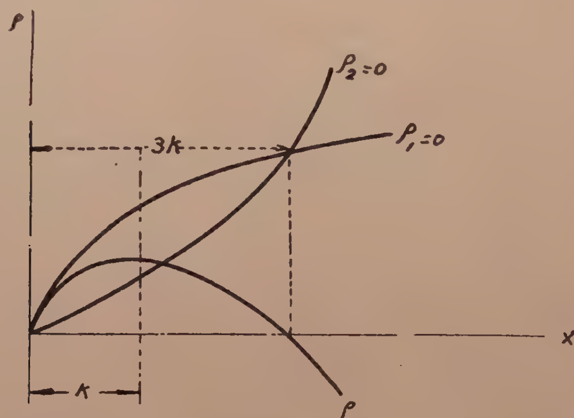


Figura 4

3) Estudiemos la variación que la densidad de energía luminosa experimenta en el plano $x = k$ al variar k.

Consideremos para ello (fig. 3), la banda elemental que produce una zona de salida del sistema en la cáustica, y sea ds su área. Sea ds' el área de la corona circular producida en el plano de frente.

Toda la energía luminosa que emerge de la zona considerada en el sistema, se concentra en la banda de la cáustica y pasa a la correspondiente corona circular del plano de frente. Si designamos por E_c la densidad de energía luminosa en la cáustica, la intensidad en el plano de frente, suponiendo que el medio no es absorbente, vendrá dada por la fórmula:

$$E = E_c \frac{ds}{ds'}$$

en la que

$$ds = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx, \qquad ds' = 2\pi \rho\, d\rho$$

Diferenciando la primera de las [10], obtenemos

$$d\rho = \tfrac{3}{4} c \frac{k - x}{\sqrt{cx}}\, dx$$

Asimismo, diferenciando la segunda de las [6]:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \tfrac{9}{4}\, cx$$

Sustituyendo valores en la [11]

$$E = E_c \frac{4\, x \sqrt{cx\,(4 - 9\, x)}}{3\, c\,(x^2 - 4\, kx + 3\, k^2)} \qquad [12]$$

Si fijada la banda, es decir, fijado su rayo medio y por tanto la abscisa de contacto que figura en la [12], hacemos variar la posición del plano de frente, la densidad de energía luminosa irá variando con k.

El denominador de la [12] es una forma cuadrática en k y x que se anula para dos valores de k independientemente de x. Estos valores, reales o imaginarios, son:

$$k_1 = \frac{x}{3}, \qquad k_2 = x$$

para cuyas posiciones se hará infinita la densidad de energía luminosa en el plano de frente.

Por lo que hemos visto anteriormente, estas posiciones del plano corresponden la primera a la abscisa en el origen del rayo medio, es decir, a la aberración esférica longitudinal zonal, y la segunda a la abscisa de tangencia de dicho rayo medio, que, sustituídas en la primera de las [10], dan para los valores de los radios correspondientes

$$\rho_1 = 0 \qquad \rho_2 = y$$

Como para cada valor de x sucederá lo mismo al variar k, podemos asegurar que para valores de k comprendidos entre 0 y $\frac{x_m}{3}$, siendo x_m la abscisa de tangencia del rayo marginal, en todo plano de frente existen dos zonas en las cuales la iluminación se hace infinita, que corresponden a la línea de intersección con la cáustica y al punto de intersección con el eje. Como la salida de rayos viene limitada por la apertura del sistema, para valores de k comprendidos entre $\frac{x_m}{3}$ y x_m, sólo tiene existencia verdadera el infinito

correspondiente a la línea de intersección con la cáustica, y para valores absolutos mayores de k desaparecen los dos infinitos.

Entre estos valores de k para los cuales se hace la densidad infinita, debe existir un mínimo relativo. Derivando la [12] respecto de k, se obtiene para el valor de k correspondiente a este mínimo

$$k = \tfrac{2}{3} x$$

A medida que crece k en valor absoluto, mientras el numerador de la [12] permanece constante, el denominador crece indefinidamente, y tendremos

$$\lim_{|k| \to \infty} E = 0$$

En realidad, el crecimiento de $|k|$ al tomar valores negativos, viene limitado por la presencia del sistema; cuando k coincida con el plano tangente a la última superficie del sistema, la intensidad luminosa debe ser igual en las dos coronas, puesto que coinciden.

En efecto, consideremos (fig. 5) un sistema infinitamente del-

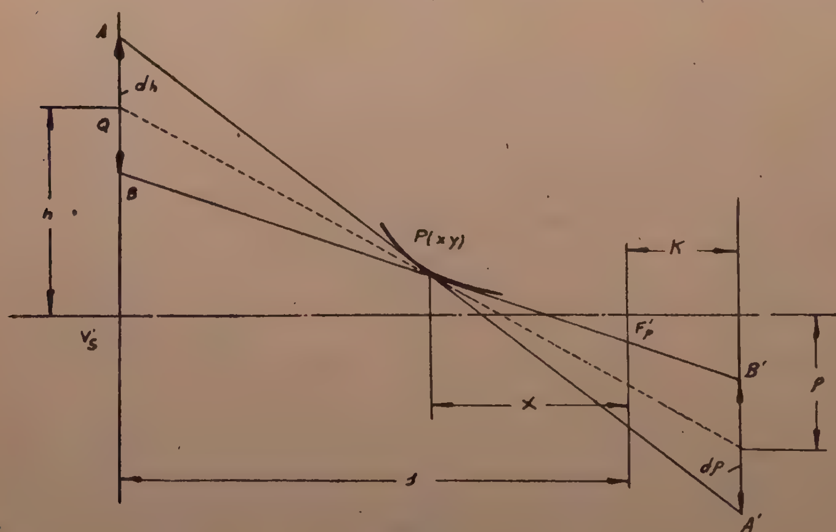


Figura 5

gado, y sea la recta AV' la traza sobre el plano del dibujo del plano tangente a la última superficie del sistema en su vértice. Supongamos que en dicho plano y en la zona considerada la energía luminosa tiene una densidad E_0. En el límite, los triángulos

ABP y A'B'P son homotéticos con centro en P. Las densidades en una y otra corona vendrán relacionadas por

$$E = E_0 \frac{hdh}{\rho d\rho} \qquad [13]$$

De la figura deducimos

$$\frac{dh}{d\rho} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} = \frac{-s' - x}{k - x}$$

Cortando la tangente a la cáustica, dada por la [7], respectivamente por las rectas $x=k$ y $x=-s'$, tenemos

$$\rho = \tfrac{1}{2}\sqrt{cx}\,(3k - x) \qquad \text{y} \qquad h = \tfrac{1}{2}\sqrt{cx}\,(-3s' - x)$$

que sustituídas en la [13] dan

$$E = E_0 \frac{(-3s' - x)(-s' - x)}{(3k - x)(k - x)} \qquad [14]$$

La [14] comprueba una vez más que cuando k toma un valor igual al valor de la aberración esférica longitudinal de la zona,

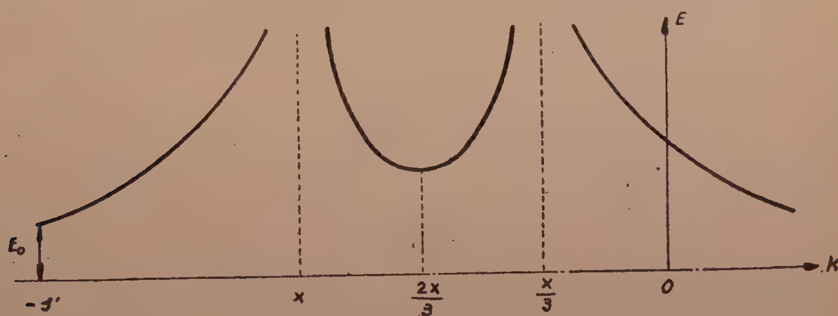


Figura 6

la densidad de energía luminosa se hace infinita, así como cuando k toma el valor correspondiente a la abscisa de tangencia. De ella deducimos también que

$$\lim_{k \to -s'} E = E_0$$

Si en un sistema cartesiano tomamos los valores de k en abscisas y los de E en ordenadas, tendremos el diagrama de la figura 6.

4) En el párrafo anterior hemos estudiado la variación de la densidad luminosa en una zona del plano de frente correspondiente a otra de salida del sistema al variar la posición del plano.

Tomemos ahora el sistema en toda su apertura y veamos cómo se distribuye la luz en el plano $x=k$.

Consideremos (fig. 7), el rayo que emerge de una altura h, el cual encuentra al plano en un punto de coordenadas

$$x=k \qquad y=\rho$$

De la figura deducimos

$$\frac{\rho}{h}=\frac{a\,\mathrm{tg}^2\,\bar{\sigma}'_z-k}{\overline{V'F'_z}}=\frac{a\,\mathrm{tg}^2\,\bar{\sigma}'_z-k}{-\overline{F'_pV}-\overline{VV'}+\overline{F'_pF'_z}}=\frac{\dfrac{x}{3}-k}{-\overline{F'_pV}+\overline{F'_pF'_z}}$$

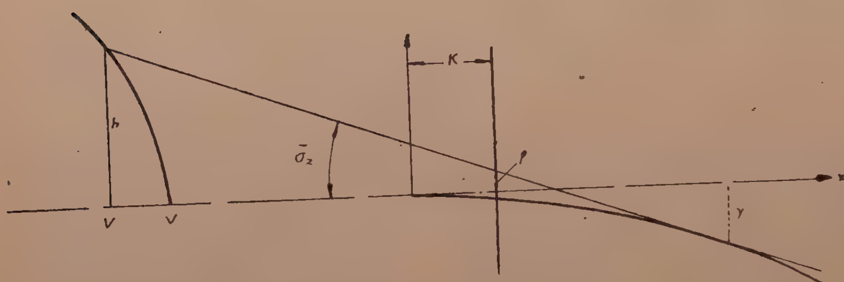


Figura 7

pues despreciamos $\overline{VV'}$ por haber considerado sistema delgado en tercer orden. Teniendo en cuenta

$$\overline{VF'_p}=s'$$

escribiremos

$$\rho=h\,\frac{x-3\,k}{3\,s'+x} \qquad [15]$$

y por la misma semejanza:

$$\rho=-\frac{y}{2}\,\frac{x-3\,k}{z} \qquad [16]$$

De las [15] y [16] obtenemos

$$\rho=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{27\,a}}\,\sqrt{x}\,(x-3\,k) \qquad [17]$$

que coincide con la [8], y

$$h = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{27\,a}}\, \sqrt{x}\,(3\,s' + x) \qquad [18]$$

también hallada anteriormente.

Ahora bien, puesto que la cáustica es una curva de tercer orden, desde un punto cualquiera se le podrán trazar tres tangente reales o bien una real y dos imaginarias, por consiguiente, por el punto del plano de frente de coordenadas (k, ρ) pasarán, en general tres rayos, cuyas abscisas de tangencia con la cáustica designaremos por x_1, x_2, x_3.

Haciendo $x_1 = x$, se encuentran para x_2 y x_3 las soluciones

$$x_1 = x$$

$$x_2 = -\frac{x - 6\,k}{2} + \sqrt{\frac{12\,kx - 3\,x^2}{4}}$$

$$x_2 = -\frac{x - 6\,k}{2} - \sqrt{\frac{12\,kx - 3\,x^2}{4}}$$

que sustituídas en la [18] nos dan las tres alturas medias de las tres zonas que contribuyen con su energía luminosa a la correspondiente del plano de frente, de radio ρ, en la cual se sobreponen. Hecha la sustitución tenemos los siguientes valores de h:

$$h_1 = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{27\,a}}\, \sqrt{x}\,(3\,s' - x) \qquad [19]$$

$$h_2 = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{27\,a}} \sqrt{-\frac{x-6\,k}{2} + \sqrt{\frac{12\,kx-3x^2}{4}}} \left(-\frac{x-3\,k}{2} + \sqrt{\frac{12\,kx-3x^2}{4}} + 3\,s'\right) \qquad [20]$$

$$h_3 = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{27\,a}} \sqrt{-\frac{x-6\,k}{2} - \sqrt{\frac{12\,kx-3x^2}{4}}} \left(-\frac{x-3\,k}{2} - \sqrt{\frac{12\,kx-3x^2}{2}} + 3\,s'\right) \qquad [21]$$

Por estas tres zonas del sistema pasarán cantidades de energía luminosa proporcionales a su área, es decir, proporcionales respectivamente a

$$2\,\pi h_1 dh_1, \qquad 2\,\pi h_2 dh_2, \qquad 2\,\pi h_3 dh_3$$

que se concentrarán sobre zonas respectivas del plano de frente, de áreas:

$$2\,\pi \rho d\rho_1, \qquad 2\,\pi \rho d\rho_2, \qquad 2\,\pi \rho d\rho_3$$

De las anteriores expresiones de h_1, h_2, h_3, y de las de ρ en función de x_1, x_2, x_3, obtenemos

$$dh_1 = \tfrac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{27\,a}}\;\frac{s' + x}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$dh_2 = \frac{\partial h_2}{\partial x_2}\,\frac{dx_2}{dx}\,dx = \tfrac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{27\,a}}\;\frac{s' + x_2}{\sqrt{x_2}}\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\frac{12\,k - 6\,x}{2\sqrt{12\,kx - 3\,x^2}}\right)dx$$

$$dh_3 = \frac{\partial h_3}{\partial x_3}\,\frac{dx_3}{dx}\,dx = \tfrac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{27\,a}}\;\frac{s' + x_3}{\sqrt{x_3}}\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\frac{12\,k - 6\,x}{2\sqrt{12\,kx - 3\,x^2}}\right)dx$$

$$d\,\rho_1 = \tfrac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{27\,a}}\;\frac{x - k}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$d\rho_3 = \frac{\partial \rho_2}{\partial x_2}\,\frac{dx_2}{dx}\,dx = \tfrac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{27\,a}}\;\frac{x_2 - k}{\sqrt{x_2}}\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\frac{12\,k - 6\,x}{2\sqrt{12\,kx - 3\,x^2}}\right)dx$$

$$d\rho_3 = \frac{d\,\rho_3}{\partial x_3}\,\frac{dx_3}{dx}\,dx = \tfrac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{27\,a}}\;\frac{x_3 - k}{\sqrt{x_3}}\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\frac{12\,k - 6\,x}{2\sqrt{12\,kx - 3\,x^2}}\right)dx$$

Si suponemos uniforme la densidad de energía luminosa en el plano tangente a la última superficie del sistema en su vértice, que designaremos con E_0, la densidad en la zona de radio ρ vendrá dada por:

$$E = E_0\,\frac{h_1\,dh + h_2\,dh_2 + h_3\,dh_3}{\rho\,(d\,\rho_1 + d\,\rho_2 + d\,\rho_3)} \qquad [22]$$

El valor de E variará con x y se hará infinito cuando se anule el denominador de la [22], es decir, cuando

$$\rho(d\rho_1 + d\rho_2 + d\rho_3) = 0$$

que admite las soluciones

$$\rho = 0$$

a la cual corresponde

$$x = 3\,k$$

y

$$d\rho_1 + d\rho_2 + d\rho_3 = 0$$

que se cumple para

$$x = k$$

La primera de éstas corresponde al punto de intersección del plano con el eje, y la segunda a la línea de intersección del plano con la cáustica, lo cual coincide con las conclusiones a que habíamos llegado al estudiar el caso de una zona.

Hemos de observar que la fórmula [22] no puede aplicarse de un modo general, ya que la apertura del sistema limita la cáustica y, aunque x_1, x_2, x_3, tengan existencia matemática real, carecen de existencia física en ciertos intervalos: así, la x_1 sólo existe en el intervalo $(0, x_m)$, es decir, para rayos que estén en el interior

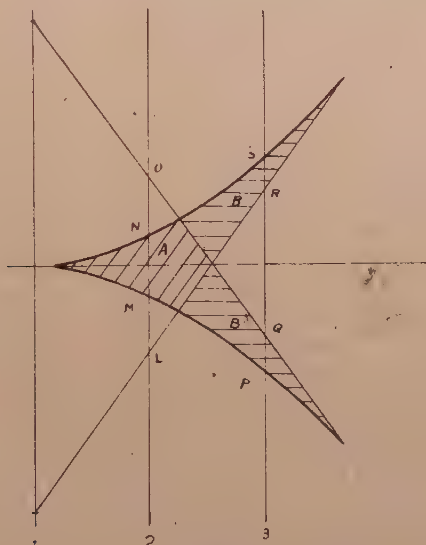


Figura 8

del cono de rayos marginales. Por lo que rspecta a x_2 y x_3 encontramos, a partir de sus expresiones, que solamente tienen existencia real cuando x y k están ligados por la relación $x < 4k$, sin embargo, la limitación de la cáustica hace que en la región B de la figura 8 solamente concurran dos en lugar de tres, que son precisamente aquellos cuyas abscisas de tangencia son x y x_3. Poi tanto, al hacer el estudio numérico de la distribución de luz, deben tenerse en cuenta estas consideraciones y prescindir en cada caso de los sumandos que tanto en el numerador como en el denominador de la [22] no deban figurar.

En el plano 1 solamente incidirá un rayo de luz en cada punto dentro de la zona que limita el cono marginal y ninguno fuera de ella; en el plano 2, incidirá un rayo solamente dentro de la zona

LM y tres en la MN, y en el 3 incidirán dos rayos en la zona PQ y uno en la QR.

5) Para estudiar la iluminación relativa que este flujo de energía luminosa produce en una placa situada en el plano de frente considerado, no tendremos en cuenta otro factor que el seno del ángulo de incidencia, ya que el cuadrado de la distancia, dentro de la zona de tercer orden puede considerarse igual para todos los rayos.

Consideremos (fig. 8) un rayo que incide sobre el plano $x = k$ en P, bajo un ángulo γ. Este rayo será tangente a la cáustica en un punto de coordenadas (x, y). De la pendiente de la cáustica en este punto

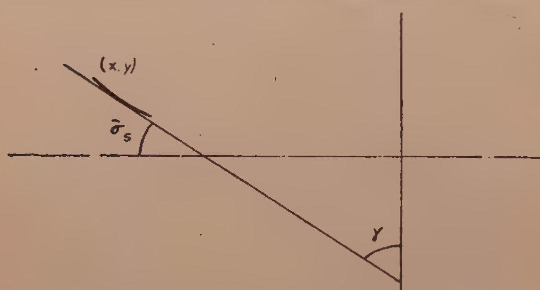


Figura 9

$$\operatorname{tg} \bar{\sigma}'_s = \tfrac{3}{2} \sqrt{cx}$$

deducimos para el valor de sen γ

$$\operatorname{sen} \gamma = \cos \bar{\sigma}'_s = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{4} cx}}$$

Análogas expresiones encontraríamos para los senos de los ángulos de incidencia de los otros dos rayos que, en general, pasarán por el punto P, en función de sus abscisas de tangencia x_2, x_3.

La iluminación relativa teniendo en cuenta la [22] y prescindiendo de las constantes que para nada van a influir en esta distribución, vendrá dada por

$$I_r = \frac{1}{\rho} \left[\frac{h_1 dh_1}{d\rho_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{4} cx}} + \frac{h_2 dh_2}{d\rho_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{4} cx_2}} + \frac{h_3 dh_3}{d\rho_3} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{4} cx_3}} \right] \quad [23]$$

BIBLIOGRAFIA

MORAIS, C.—*Studio della caustica e dell'onda luminosa nei sistemi affetti da aberraziones sferica semplice.* (Atti Soc. L. S. L., vol. XII, fasc. IV.)

HÉEL, A. C. S.—*On the ligth distribution in tre image point.* (En A. Bouwers-Achievements in Optics, pág. 94-103. Elsevier, 1946.)

18 ESTUDIOS FOTOELASTICOS COMPARATIVOS SIN UTILIZAR DINAMOMETROS, *por* L. Villena Pardo.

SUMMARY

The Photoelasticity renders one of the best services in the comparative study of different variances on a same solution.

In these cases it is possible to find the solution without the need to measure the applied forces, making use of very simple photoelastic apparatus and completing the results with the Liebmann method.

This process applies itsef to an element of multiple-arch dam examining two variances.

1.—Introducción

La fotoelasticidad presta uno de sus mejores servicios en los estudios comparativos sobre diversas variantes de un mismo modelo, permitiendo elegir aquella solución compatible con las condiciones impuestas por el problema y que muestra una distribución óptima de tensiones.

Para realizar un ensayo fotoelástico se precisa disponer de dinamómetros suficientemente precisos que permitan determinar exactamente las cargas aplicadas a fin de obtener las tensiones correspondientes en el natural a un determinado valor de las mismas, sin más que utilizar los factores de reducción de fuerzas L y de superficies M, por medio de la fórmula

$$\sigma = \frac{L}{M} \sigma_0$$

en que σ y σ_0 son tensiones del natural y del modelo.

Ocurre, a veces, que la interposición de un dinamómetro entre el modelo y el artificio empleado para aplicar las cargas, resulta difícil o enojosa, debido a la falta de espacio o a la mala disposición del conjunto sobre el marco de cargas.

Además, pensando siempre que todo ingeniero o proyectista debe tener a mano una instalación fotoelástica, conviene simplificar al máximo los métodos operatorios y los aparatos y accesorios a utilizar (1).

(1) Véase en este sentido nuestra publicación *Un fotoelastoscopio de bolsillo.* An. Fís. y Quím., XLII (1946), 281-286.

Por todo ello es conveniente dar un método que, sin necesidad de utilizar dinamómetros, permita comparar perfiles semejantes, variaciones alrededor de una solución, que será así obtenida rápidamente y con toda facilidad por procedimientos ópticos.

2.—Resolución del problema

Puesto que en estos casos, a que nos venimos refiriendo, suele haber, en general, algún elemento de unión o de sustentación con perfil rectangular, es plausible suponer que en alguna zona de este elemento reine un estado elástico unidimensional, de tensión pura o compresión pura. El aserto queda comprobado, en cada caso, por la imagen de isocromos obtenida, ya que, si es cierto, toda la región en que reine el estado de tensión unidimensional tendrá la misma tonalidad, formando una zona isocroma en la cual es constante la única tensión principal existente.

Para comparar dos o más modelos diferentes bastará, pues, hacer que en todos ellos corresponda el mismo orden de extinción (o la misma tonalidad) a la zona mencionada, en que se ha comprobado por la observación y por un raciocinio elemental, que existe una tracción o una compresión pura.

Conseguir la igualación de tonalidades asegurándose que estas tonalidades están producidas por estados de tensión idénticos es, a menudo, fácil. Corrientemente las cargas están aplicadas en dos zonas, situadas a uno y otro lado del elemento rectangular y la dirección de las fuerzas coincide con uno de los lados de este elemento. Evidentemente, una misma tonalidad isocromática corresponderá siempre a un mismo valor de la tensión y, por consecuencia, la fuerza unitaria aplicada al modelo será la misma.

Cuando las zonas de aplicación de cargas son más numerosas, es fácil, mediante un sencillo cálculo, ver qué influencia tiene cada una de ellas en el estado elástico unidimensional tomado como elemento de comparación y se pueden ir aplicando sucesivamente las distintas fuerzas exteriores, de manera que cada una de ellas dé lugar al incremento correspondiente del orden de extinción o tonalidad de la región observada.

De esta manera queda resuelto el problema de comparar soluciones parecidas, pudiendo estudiarse las concentraciones de tensión y las tensiones máximas que a cada una corresponden, a igualdad de cargas.

En numerosos casos podrá, además, establecerse una relación entre la tracción o compresión puras del elemento rectangular y las fuerzas de tracción o compresión aplicadas en la superficie del cuerpo. Bastará tener en cuenta las secciones del modelo en cada uno de estos dos lugares y, en todo caso, el ángulo que las tensiones correspondientes a ambos sitios forman entre sí. Este ángulo, definido en muchos casos por la forma geométrica del modelo, está también dado por las redes de isoclinas, estudio para el que no es necesaria la igualdad de las fuerzas aplicadas, sino sólo su semejanza.

Queda así, de una manera general, abierto un camino sencillo y rápido para estudiar modelos semejantes y deducir fotoelásticamente la forma óptica de una pieza o estructura.

3.—Aplicación a un caso práctico

Como ejemplo de la aplicación de estos métodos, damos a continuación los resultados obtenidos al estudiar dos modelos semejantes de presas de contrafuerte, al objeto de elegir aquel para el que las tracciones sean mínimas en la cara de aguas arriba.

De cada una de las dos variantes se construyeron modelos en plexiglas para el estudio de isoclinas. La hipótesis de cargas, análoga en ambos casos, se reduce a una fuerza de compresión uniforme, aplicada en la cara de aguas arriba, y a la reacción correspondiente en el contrafuerte (2).

Para el trazado de las curvas isoclinas se aplicó una carga uniforme de intensidad arbitraria, pero suficiente para obtener una perfecta definición de estas líneas.

A fin de asegurar la ausencia de tensiones transversales en la zona de aplicación de fuerzas, debidas a la desigualdad de coeficientes de Poissons entre el modelo y el artificio empleado para aplicar las cargas, se interpuso una tira del mismo material perfectamente rectificada. También se encontró aceptable la interposición de una tapa de fieltro espeso que sigue todas las variaciones de espesor del modelo sin introducir efectos perturbadores.

De las redes de isoclinas así obtenidas, se dedujeron, por integración gráfica, las correspondientes redes de isostáticas, que per-

(2) Adviértase que este estudio se refiere a una sección horizontal que prescinde de las acciones debidas a las partes situadas por debajo y por encima de la sección considerada.

mitieron comprobar, como era de esperar, la existencia de un estado unidimensional en la mayor parte del contrafuerte, zona que se eligió para la igualación de tonalidades en el estudio de isocromas.

A continuación se dan los resultados, para un primer modelo (figuras 1 y 2) que fué abandonado ante el segundo (figs. 3 a 5), del cual se dan todas las redes de líneas utilizadas.

En las figuras 1 *b* y 3 *b* se reproducen las redes de isoclinas e

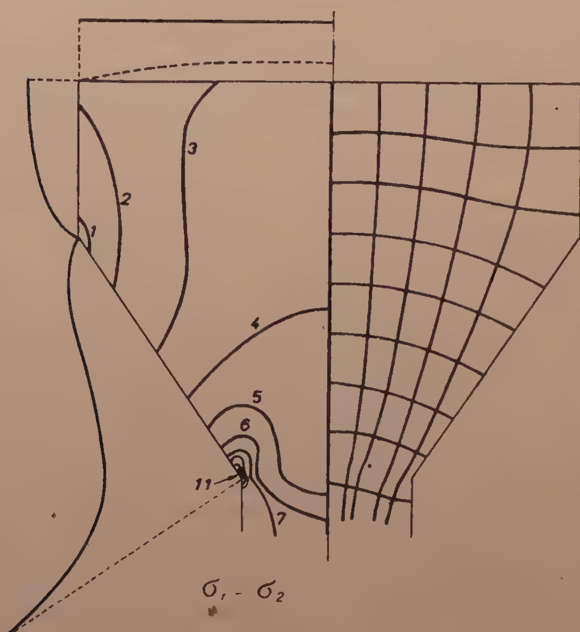


Figura 1

Primer modelo

a) Isocromas **b) Isoclinas**

isostáticas así obtenidas, pudiéndose apreciar una gran semejanza entre ambos modelos, por lo que no se pueden sacar deducciones interesantes de esta comparación.

Utilizando modelos de baquelita se hizo el estudio de isocromas haciendo que a la zona de igualación le correspondiera el 7.° orden de extinción para luz monocromática de sodio, que fué la utilizada. En las figuras 1 *a* y 4 *a* se reproducen las redes de isocromas obtenidos, que evidentemente corresponden a una misma tensión de compresión en el contrafuerte y a una misma fuerza unitaria

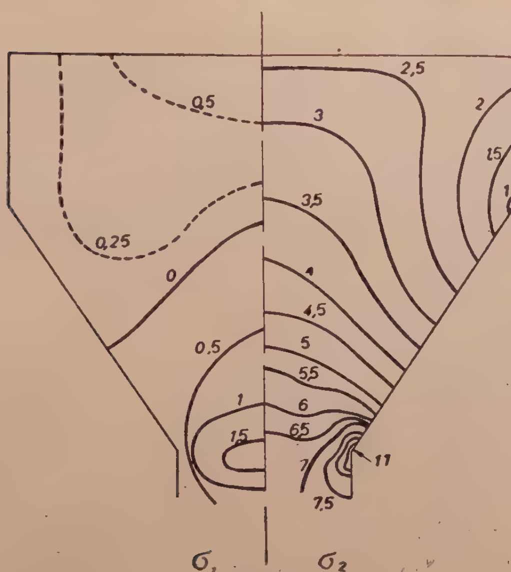


Figura 2
Primer modelo
Líneas de nivel de las tensiones principales

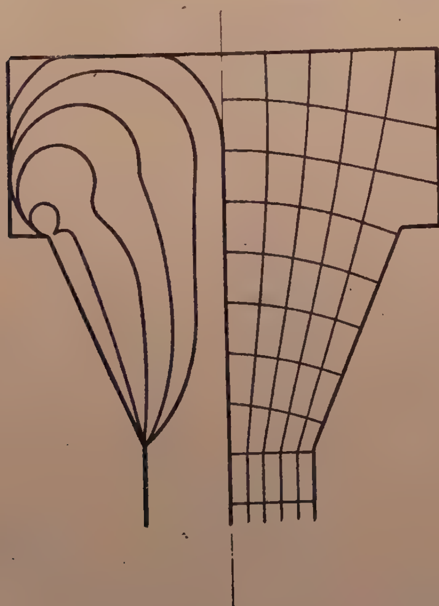


Figura 3
Segundo modelo
a) Isoclinas b) Isostáticas

en la cara de aguas arriba. Tanto para estas redes de curvas como para todas las demás, se eligió como unidad el incremento de tensión tangencial máxima correspondiente al paso de un orden de extinción al inmediato. Por tanto, la tensión de compresión correspondiente al contrafuerte será $\sigma_2 = -7$

En las mismas figuras 1 *a* y 4 *a* se ha dibujado la variación de las tensiones transversas en los cantos, que son de compresión en todos ellos excepto en la cara de aguas arriba.

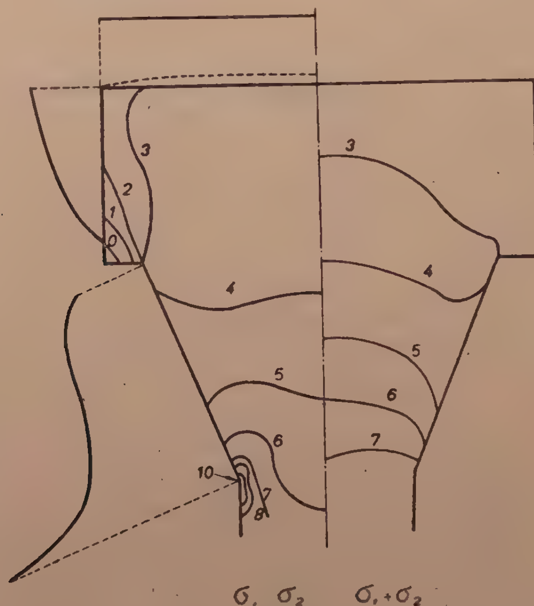


Figura 4
Segundo modelo
a) Isocromas b) Isopacas

Para este borde corresponde, según se puede comprobar por consideraciones geométricas, una tensión de compresión

$$\sigma_2 = -2{,}38 \qquad\qquad \sigma_2 = -2{,}79$$

para uno y otro caso. Pero los valores de la tensión tangencial máxima en este borde no coinciden con la mitad de estos valores, lo cual exige la coexistencia de una tensión de tracción cuya variación se ha dibujado a trazos en dichas figuras y que alcanza sus máximos para el centro con los valores

$$\sigma_1 = 0{,}70 \qquad\qquad \sigma_1 = 0{,}35$$

Este resultado evidencia, sin más, que las tensiones de tracción, peligrosas en las construcciones de hormigón armado, han de ser superiores en el primer modelo que en el segundo, tanto para el estudio simplificado de una sección aislada como para el problema real de una estructura en tres dimensiones.

Sin embargo, y para saber las zonas afectadas por estas tensiones de tracción, se procedió a hacer el cálculo de $(\sigma_1 + \sigma_2)$ siguiendo el procedimiento de Liebmann descrito en un trabajo anterior (3).

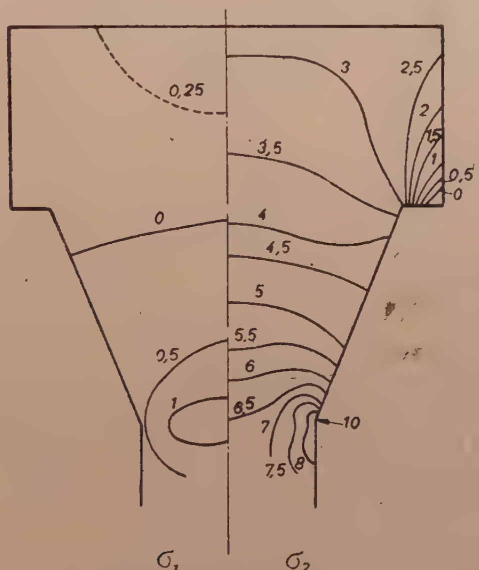


Figura 5

Segundo modelo

Líneas de nivel de las tensiones principales

En la figura 46 puede verse la red de isopacas o líneas de igual suma de tensiones principales, así obtenidas para el segundo modelo.

Finalmente, a partir de las redes de isocromas e isopacas y siguiendo el procedimiento de superposición e intersección (4), se

(3) L. VILLENA: *La fórmula de Liebmann como complemento a la determinación óptica de tensiones.* AN. FÍS. QUÍM., XLIV (1948).

(4) L. VILLENA: *Fotoelasticidad.* Madrid, 1943, pág. 184.

hallaron las líneas de nivel correspondiente a cada una de las tensiones principales, con lo que quedó totalmente resuelto el problema.

Las figuras 2 y 5 reproducen estos resultados y permiten comprobar que la zona afectada por tensiones de tracción es bastante mayor en el primer modelo que en el segundo. Este último ofrece, pues, una mayor seguridad, pues existen menos puntos sometidos a tracción y los valores de éstas son más pequeños. Además, las tensiones máximas de compresión, que se presentan en los ángulos de unión entre el contrafuerte y la presa, son también más pequeñas en este modelo que en el primero.

Instituto de Optica «Daza de Valdés».
Sección de Optica Física.

Presentado en la I Reunión del Instituto de Optica. Barcelona, junio 1947.

19. DENSIDADES ESCALARES Y LEYES DE CONSERVACION,

por RAMÓN ORTIZ FORNAGUERA.

SUMMARY

We have tried to show some relationships between the Hamiltonian derivative of a scalar density, the geodesics and the close connection of the space in which they are all inclued. Special attention has been paid to the case in which scalar density is a function of a symmetrical covariant tensor and to its derivatives up to a certain extent.

En cualquier espacio riemanniano o pseudorriemanniano, en particular en el espacio de la relatividad general, la derivada hamiltoniana en el sentido de Eddington de un invariante (escalar) fundamental, esto es, de un invariante función sólo de las componentes del tensor fundamental de la métrica es un tensor cuya divergencia se anula idénticamente, anulación idéntica que expresa la ley de conservación del ente físico representado por dicho tensor. Se demuestra en la presente comunicación que este resultado es un caso particular de una relación más general a que satisfacen las derivadas hamiltonianas de las densidades escalares de la forma

$$\mathfrak{A}(a_{ik}, \partial_m a_{ik}, \ldots, \partial^p_{m_1 \ldots m_p} a_{ik}),$$

donde a_{ik} es un tensor covariante cualquiera, independientemente de toda consideración afín o métrica. De este resultado se deduce que existen infinitas conexiones afines en las que el el pseudotensor densidad $\mathfrak{G}^{ik}$, derivada hamiltoniana de una densidad escalar de aquella forma dada, posee la propiedad de anularse idénticamente su divergencia y que, en ciertas condiciones, el conocimiento del valor de tal derivada, de la torsión del espacio y de las geodésicas determina unívocamente la conexión afín del espacio. En particular, si es nula la torsión, la conexión afín está determinada por las geodésicas y la ley de conservación $\nabla_i \mathfrak{G}^{ik}=0$, supuesto que se cumplen las condiciones a que antes hemos aludido.

1. Sea X_n una variedad de n dimensiones, $a_{ik}(x)$, $((x)= =(x^1, \ldots, x^n))$ un tensor covariante de segundo orden cualquiera

referido a un sistema de coordenadas curvilíneas (x^i) en X_n, y $\mathfrak{A}$ una densidad escalar función de las componentes a_{ik} y de las derivadas parciales de éstas hasta un cierto orden p. Si

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 (a_{ik}, \partial_m a_{ik}, \ldots, \partial^p_{m_1 \ldots m_p} a_{ik}), \quad \left(\partial_m \equiv \frac{\partial}{\partial x^m}\right) \qquad [1]$$

es la expresión funcional de $\mathfrak{A}$ en el sistema (x^i), la componente $\bar{\mathfrak{A}}$ de $\mathfrak{A}$ en el sistema de coordenadas $(\bar{x}^i)$ será

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{A}} &= \mathfrak{A}_1 (\bar{a}_{ik}, \bar{\partial}_m \bar{a}_{ik}, \ldots, \bar{\partial}^p_{m_1 \ldots m_p} \bar{a}_{ik}) = \\ &= \Delta(\bar{x}) \cdot \mathfrak{A}_1 (a_{ik}, \partial_m a_{ik}, \ldots, \partial^p_{m_1 \ldots m_p} a_{ik}),\end{aligned} \quad \left(\bar{\partial}_m \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{x}^m}\right) \qquad [1']$$

donde $\Delta(\bar{x}) = ||\bar{\partial}_k x^i||$ es el determinante jacobiano de la transformación $x^i = x^i(\bar{x})$, transformación que supondremos regular en todo punto de un cierto dominio D_0 de X_n. Por hipótesis, además, la función $\mathfrak{A}_1(a_{ik}, \partial_m a_{ik}, \ldots, \partial^p_{m_1 \ldots m_p} a_{ik})$ será función continua y derivable de todos sus argumentos a_{ik}, $\partial_m a_{ik}$, ..., $\partial^p_{m_1 \ldots m_p} a_{ik}$, con derivadas parciales continuas, en un cierto dominio de su campo de definición (1). Con otras palabras, admitiremos que las funciones $\mathfrak{A}_1$ y a_{ik} satisfacen un conjunto de condiciones que permitan afirmar la validez de todas las transformaciones que aparezcan en el curso del razonamiento.

Esto sentado, consideremos la integral

$$A = \int_D \mathfrak{A}\, d\tau = \int_D \mathfrak{A}_1 (a_{ik}, \ldots)\, d\tau,$$

en la que $D \subset D_0$ y $d\tau = dx^1, \ldots, dx^n$. Dado que $d\tau$ es una capacidad, A es un invariante (escalar) que expresa una cierta propiedad *global* e *intrínseca* del dominio D, esto es, una propiedad vinculada, no a un punto de D, sino a D considerado como un todo, e

(1) El campo de definición de A_1 es un cierto dominio del espacio producto cartesiano de los intervalos de variabilidad de a_{ik}, $\partial_m a_{ik}$, ..., $\partial^p_{m_1 \ldots m_p}$. Nada tiene que ver este espacio con X_n, pero convendremos en que $a_{ik}(x)$ sea tal que, para todo x de D_0, $(a_{ik}(x), \partial_m a_{ik}(x), \partial_m a_{ik}(x), \ldots, \partial^p_{m_1 \ldots m_p} a_{ik}(x))$ pertenezca a aquel dominio del campo de definición de $\mathfrak{A}_1$ en el cual se cumplen las condiciones indicadas, y en que $a_{ik}(x)$, $\partial_m a_{ik}(x)$, ..., $\partial^p_{m_1 \ldots m_p} a_{ik}(x)$ sean funciones continuas de x en D_0.

independiente del sistema de coordenadas elegido para calcular su valor. Su significado será uno u otro según la significación, física o geométrica, de la densidad $\mathfrak{A}$. A depende exclusivamente del tensor a_{ik} y de D:

$$A = A\,[a_{ik};\ D].$$

Luego, para D fijo, A es una funcional de a_{ik} (1) en el sentido de Hadamard.

Atribuyamos a a_{ik} una variación infinitesimal δa_{ik}, de tal naturaleza, que las funciones δa_{ik} de $x^1, \ldots, x^n$ que la definen y todas sus derivadas hasta las de orden $p-1$ inclusive sean nulas en la frontera S de D, de manera que en S se tenga

$$[\delta\, a_{ik}(x)]_S = [\partial_m \delta\, a_{ik}(x)]_S = \ldots = [\partial^{p-1}_{m_1 \ldots m_{p-1}} \delta\, a_{ik}(x)]_S = 0. \qquad [3]$$

Por lo demás, la variación $\delta a_{ik}(x)$ puede ser cualquiera. Evidentemente, el valor $A + \delta A$ de A que corresponde a los nuevos valores $a_{ik} + \delta a_{ik}$ de los argumentos a_{ik} está ligado con A por la relación

$$\delta A = \delta \int_D \mathfrak{A}_2 (a_{ik}, \ldots)\, d\tau = \int_D \delta \mathfrak{A}_1 (a_{ik}, \ldots)\, d\tau =$$

$$= \int_D \left\{ \sum_{r=0}^{p} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial (\partial^r_{m_1 \ldots m_r} a_{ik})}\, \partial^r_{m_1 \ldots m_r} \delta\, a_{ik} \right\} d\tau, \qquad [4]$$

$$(m_i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$
$$(i, k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

puesto que D se mantiene fijo y $\delta(\partial^r_{m_1 \ldots m_r} a_{ik}) = \partial^r_{m_1 \ldots m_r} (\delta\, a_{ik})$. Mediante integraciones parciales sucesivas y en virtud de las condiciones [3], la integral $\int_D \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial (\partial^r_{m_1 \ldots m_r} a_{ik})}\, \partial^r_{m_1 \ldots m_r} \delta\, a_{ik} \cdot d\tau$, término genérico del último miembro de [4], puede escribirse en la forma

$$(-1)^r \int_D \partial^r_{m_1 \ldots m_r} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial (\partial^r_{m_1 \ldots m_r} a_{ik})} \right\} \cdot \delta\, a_{ik}\, d\tau. \quad (2)$$

---

(1) Nos ceñimos aquí al caso en que $\mathfrak{A}_1$ depende sólo de las componentes a_{ik} y de sus derivadas, sin que en $\mathfrak{A}_1$ aparezcan las componentes de ningún otro tensor.

(2) El índice r es índice de *orden de derivación* al cual no se aplica el convenio de sumación de Einstein. En la integral, la suma afecta sólo a $m_1, \ldots, m_r$.

En efecto, es claro que

$$\int_D \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial (\partial^r_{m_1 \ldots m_r} a_{ik})} \partial^r_{m_1 \ldots m_r} \delta a_{ik} \cdot d\tau = \int_D \partial_{m_1} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial (\partial^r_{m_1 \ldots m_r} a_{ik})} \partial^{r-1}_{m_2 \ldots m_r} \delta a_{ik} \right\} d\tau -$$

$$- \int_D \partial_{m_1} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial (\partial^r_{m_1 \ldots m_r} a_{ik})} \right\} \cdot \partial^{r-1}_{m_2 \ldots m_r} \delta a_{ik} \cdot d\tau ,$$

y como la primera integral del segundo miembro es nula, pues se reduce a una integral extendida a la frontera S de D y en ella es $\partial^{r-1}_{m_2 \ldots m_r} \delta a_{ik} = 0$, resulta en definitiva

$$\int_D \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial (\partial^r_{m_1 \ldots m_r} a_{ik})} \partial^r_{m_1 \ldots m_r} \delta a_{ik} \cdot d\tau = - \int_D \partial_{m_1} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial (\partial^r_{m_1 \ldots m_r} a_{ik})} \right\} \cdot \partial^{r-1}_{m_2 \ldots m_r} \delta a_{ik} \cdot d\tau.$$

Aplicando la misma transformación al segundo miembro e iterando este proceso r veces obtendremos, finalmente,

$$\int_D \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial (\partial^r_{m_1 \ldots m_r} a_{ik})} \partial^r_{m_1 \ldots m_r} \delta a_{ik} \cdot d\tau = - \int_D \partial_{m_1} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial (\partial^r_{m_1 \ldots m_r} a_{ik})} \right\} \cdot \partial^{r-1}_{m_2 \ldots m_r} \delta a_{ik} \cdot d\tau$$

$$= \int_D \partial^2_{m_2 m_1} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial (\partial^r_{m_1 \ldots m_r} a_{ik})} \right\} \cdot \partial^{r-2}_{m_3 \ldots m_r} \delta a_{ik} \cdot d\tau =$$

$$= (-1)^r \int_D \partial^r_{m_r \ldots m_1} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial (\partial^r_{m_1 \ldots m_r} a_{ik})} \right\} \cdot \delta a_{ik} d\tau = (-1)^r \int_D \partial^r_{m_1 \ldots m_r} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial (\partial^r_{m_1 \ldots m_r} a_{ik})} \right\} \cdot \delta a_{ik} d\tau,$$

supuesto que sean permutables entre sí los operadores diferenciales ∂_m. Por consiguiente, y en estas condiciones,

$$\delta A = \int_D \left(\sum_{r=0}^{p} (-1)^r \partial^r_{m_1 \ldots m_r} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial (\partial^r_{m_1 \ldots m_r} a_{ik})} \right\} \right) \cdot \delta a_{ik} \, d\tau , \qquad [5]$$

relación válida cualquiera que sea D, con tal que en su frontera se cumpla [3]. El primer miembro es un invariante, en tanto que diferencia de dos invariantes; luego, también el segundo. δa_{ik} es un tensor covariante, sólo sujeto a las condiciones [3], y $d\tau$ una capacidad escalar; por consiguiente,

$$\mathfrak{F}^{ik} = \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \partial^r_{m_1 \ldots m_r} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial (\partial^r_{m_1 \ldots m_r} a_{ik})} \right\} \qquad [6]$$

es una densidad contravariante de segundo orden que llamaremos

derivada hamiltoniana o *variacional* de la densidad $\mathfrak{A}$ respecto de a_{ik} (1). Con esto hemos llegado a la fórmula fundamental (Cf. Eddington, p. 140)

$$\delta \int_D \mathfrak{A}\, d\tau = \int_D \mathfrak{G}^{ik}\, \delta a_{ik}\, d\tau. \qquad [7]$$

2. Siguiendo a Eddington, consideremos ahora una deformación infinitésima δx^i del sistema de referencia, es decir, el cambio de coordenadas $\bar{x}^i = x^i + \delta x^i$, donde δx^i son funciones de x tales que

$$[\delta x^i(x)]_S = [\delta_m\, \delta x^i(x)]_S = \ldots = [\delta^p_{m_1 \ldots m_p} \delta x^i(x)]_S = 0. \qquad [8]$$

Si seguimos un punto P(x) y el elemento espacial asociado $d\tau = dx^1, \ldots, dx^n$ en el curso de la deformación, es claro que las coordenadas del punto P′, posición final de P, respecto del sistema (x^i) coinciden con las de P en el sistema ($\bar{x}^i$) y que $d\bar{\tau}_{P'} = d\tau_P$, o sea, si $\mathfrak{D}$ es el operador de la deformación infinitesimal,

$$\mathfrak{D}(P \equiv \{x^i\}_{(x)}) = (P' \equiv \{x^i\}_{(\bar{x})}), \quad \mathfrak{D}(\{(dx^i)_P\}_{(x)}) = \{(dx^i)_{P'}\}_{(\bar{x})}.$$

De ahí se sigue que

$$\int_D \bar{\mathfrak{A}}(P')\, d\bar{\tau}_{P'} = \int_D \bar{\mathfrak{A}}(P')\, d\tau_P$$

y, por lo tanto,

$$\int_D \bar{\mathfrak{A}}(P')\, d\bar{\tau}_{P'} - \int_D \mathfrak{A}(P)\, d\tau_P = \int_D \{\bar{\mathfrak{A}}(P') - \mathfrak{A}(P)\}\, d\tau_P.$$

La validez de esta última igualdad descansa en las siguientes consideraciones: *a*) la deformación es nula en la frontera S de D, por lo que la expresión analítica de los límites en las integrales del primer miembro es la misma, tanto si se expresan en el sistema

---

(1) Cf. EDDINGTON, p. 139. En rigor, sólo considera y define la derivada hamiltoniana para escalares. Dado que para nosotros a_{ik} no es un tensor privilegiado, sino cualquiera, no conviene introducir el escalar $|a|^{-\frac{1}{2}}$, ($a = ||a_{ik}||$), a pesar de que éste siempre existe, si $||a_{ik}|| \neq 0$, cualquiera que sea a_{ik} e independientemente de toda conexión métrica o afín. Cf. también, DE DONDER. *Théorie des champs gravifiques* (Mém. Scienc. Math., XIV, Gauthier-Villars, 1926), págs. 2 y 4.

(x) como si se hace en el sistema deformado $(\bar{x})$; *b*) la *capacidad* volumétrica del elemento $d\tau_P$ es igual a la de su correspondiente deformado $d\bar{\tau}_{P'}$, la capacidad volumétrica, no el *volumen* del que ni hablar cabe, pues en X_n no se ha definido métrica alguna; *c*) $\bar{\mathfrak{A}}$ (P′) es función exclusivamente del valor de a_{ik} y sus derivadas en P y de la matriz de deformación, conforme veremos al punto (1). El cálculo de la diferencia $\int_D \bar{\mathfrak{A}}(P')\, d\tau_{P'} - \int_D \mathfrak{A}(P)\, d\tau_P$ se puede llevar a cabo, por ende, en un mismo dominio sin más que considerar un integrando que en el punto genérico P tome el valor $\bar{\mathfrak{A}}(P') - \mathfrak{A}(P)$, donde $P' = \mathfrak{D}\,P$ es una función de P. Sólo nos falta expresar $\mathfrak{A}$ (P′) en función de las coordenadas $\{x^i\}_{(x)}$ de P y efectuar la integración en el dominio D referido al sistema (x^i). Se tiene (cf. [1′])

$$\bar{\mathfrak{A}}(P') = \mathfrak{A}_1[\bar{a}_{ik}(P'), \ldots]$$

y, además, limitándonos al primer orden,

$$a_{ik}(P') = \partial_i(x^m + \delta x^m)\cdot\partial_k(x^n + \delta x^n)\cdot\bar{a}_{mn}(P') =$$
$$= \bar{a}_{ik}(P') + (\partial_i dx^m)_{P'}\, a_{mk}(P') + (\partial_k \delta x^n)_{P'}\, a_{in}(P'),$$

$$a_{ik}(P') = a_{ik}(P) - (\partial_r a_{ik})_P\, \delta x^r(P), \quad (\partial_i \delta x^m)_{P'} = (\partial_i \partial x^m)_P;$$

luego

$$a_{ik}(P') = a_{ik}(P) - (\partial_r a_{ik})_P\, \delta x^r(P) - (\partial_i \delta x^m)_P\, a_{mk}(P) - (\partial_k \delta x^n)_P\, a_{ik}(P)$$

y

$$\bar{\mathfrak{A}}(P') = \mathfrak{A}_1[a_{ik}(P) + \delta a_{ik}(P), \ldots],$$

donde

$$\delta a_{ik} = -\partial_r a_{ik}\cdot\delta x^r - \partial_i \delta x^r\cdot a_{rk} - \partial_k \delta x^r\cdot a_{ir}. \qquad [10]$$

Llevemos este valor de $\bar{\mathfrak{A}}$ (P′) a [9], con lo cual

$$\int_D \mathfrak{A}(P')\, d\tau_{P'} - \int_D \mathfrak{A}(P)\, d\tau_P = \int_D \{\mathfrak{A}_1(a_{ik} + \delta a_{ik}, \ldots) - \mathfrak{A}_1(a_{ik}, \ldots)\}\, d\tau_P.$$

---

(1) Cf. R. Ortiz Fornaguera, «Acerca de algunas nociones fundamentales en teoría de la elasticidad» (Anal. de Fís. y Quím., 42, 1946, 581-608), en particular págs. 599 a 601.

El primer miembro es nulo por ser Λ un invariante y al segundo cabe aplicarle la relación [7] dando a δx_{ik} el valor [10]. Obtenemos así

$$\int_D \mathfrak{G}^{ik} (- \partial_r a_{ik} \cdot \delta x^r - \partial_i \delta x^r \cdot a_{rk} - \partial_k \delta x^r \cdot a_{ir}) \, d\tau = 0, \qquad [11]$$

igualdad que subsiste cualquiera que sea $D \subset D_0$ con tal que el corrimiento infinitesimal δx^r satisfaga las condiciones [8] en la frontera de D. Una sencilla integración por partes y la consideración de las condiciones [8] que acabamos de recordar nos permiten escribir [11] en la forma equivalente

$$\int_D \{ \partial_i (\mathfrak{G}^{ik} a_{rk} + \mathfrak{G}^{ki} a_{kr}) - \mathfrak{G}^{ik} \partial_r a_{ik} \} \, \delta x^r \, d\tau = 0, \qquad [11']$$

válida en las mismas circunstancias que aquélla. Ahora bien, el vector contravariante δx^r es arbitrario, aparte en su estar sujeto a [8]; por consiguiente, en todo punto interior a D, o lo que es lo mismo, interior a D_0, pues la única condición impuesta a D es la de ser $D \subset D_0$, deberá tenerse

$$\partial_i (\mathfrak{G}^{ik} a_{kr} + \mathfrak{G}^{ki} a_{rk}) - \mathfrak{G}^{ik} \partial_r a_{ik} = 0. \qquad [12]$$

Esta identidad fundamental a la que satisface la derivada hamiltoniana de cualquier densidad escalar de la forma [1] ha sido obtenida sin introducir concepto alguno que tenga que ver con la conexión afín o métrica de que acaso esté dotada la variedad X_n. [12] es, por ende, una propiedad de entes definidos en el estadio amorfo de la construcción de X_n, independiente en su definición de propiedades afines o métricas que acaso más tarde se les atribuirán: a_{ik} es un tensor covariante cualquiera del X_n, simétrico o no, definidor o no de una métrica, y cualquiera es la función $\mathfrak{A}_1(a_{ik}, \ldots)$ que define la densidad escalar $\mathfrak{A}$.

3. Pero supongamos ahora que a_{ik} es simétrico. La relación [12] vale entonces para la parte simétrica de $\mathfrak{G}^{ik}$, la cual coincide con $\mathfrak{G}^{ik}$ si antes de efectuar las operaciones de derivación indicadas en el segundo miembro de la definición [6] se ha «simetrizado» convenientemente la expresión de $\mathfrak{A}$—substituyendo a_{ik} por su igual $\frac{1}{2}(a_{ik} + a_{ki})$. La identidad [12], en esta hipótesis, toma la forma

$$\mathfrak{G}^{ik} (\partial_i a_{rk} + \partial_k a_{ri} - \partial_r a_{ik}) + 2 a_{rk} \partial_i \mathfrak{G}^{ik} = 0, \qquad [12a]$$

o bien, introduciendo el símbolo de Christoffel de primera especie

$$[i, k, r] \equiv \tfrac{1}{2}(\partial_i a_{rk} + \partial_k a_{ri} - \partial_r a_{ik})$$

relativo al tensor covariante simétrico a_{ik},

$$\mathfrak{g}^{ik}[ik, r] + a_{rk}\,\partial_i \mathfrak{g}^{ik} = 0. \qquad [12_2]$$

Si, además de ser simétrico, a_{ik} es tal que el determinante $||a_{ik}||$ es $\neq 0$, existe el tensor inverso $b^{ki} = \dfrac{\text{adjunto de } a_{ik}}{||a_{ik}||}$ (1) y $[12_2]$ se puede escribir también

$$\partial_i \mathfrak{g}^{ij} + \left\{ \begin{matrix} j \\ i\ k \end{matrix} \right\} \mathfrak{g}^{ik} = 0, \qquad [12_3]$$

siendo $\left\{ \begin{matrix} j \\ i\ k \end{matrix} \right\}$ el símbolo de Christoffel de segunda especie que corresponde al tensor a_{ik}:

$$\left\{ \begin{matrix} j \\ i\ k \end{matrix} \right\} = [ik, r]\, b^{rj}.$$

La identidad $[12_3]$ vale, por lo tanto, para cualquier a_{ik} simétrico y de discriminante $||a_{ik}|| \neq 0$, condiciones ambas que daremos por satisfechas en lo que sigue.

En consideración a lo que nos proponemos, es conveniente dar a $[12_3]$ otra forma sustituyendo la derivación ordinaria ∂_i por una derivación covariante ∇_i. Sean Π^{j}_{ik} los parámetros de una conexión afín cualquiera establecida en la variedad X_n. Por definición, la derivada covariante respecto de x^h de una densidad tensorial contravariante B^{ik} es la densidad tensorial mixta

$$\nabla_h \mathfrak{B}^{ik} = \partial_k \mathfrak{B}^{ik} + \Pi^{i}_{mh} \mathfrak{B}^{mk} + \Pi^{k}_{mh} \mathfrak{B}^{im} - \Pi^{m}_{mh} \mathfrak{B}^{ik}. \quad (2)$$

---

(1) El tensor inverso de un tensor de segundo orden—covariante, contravariante o mixto—existe siempre que el determinante de las componentes de éste no es nulo, independientemente de toda consideración de simetría. Cuando a_{ik} es simétrico y define la métrica en el espacio X_n, se suele llamar g_{ik} a sus componentes y g^{ik} a las del tensor inverso. Hemos representado con b_{ik} y no con a^{ik} el inverso de a_{ik} porque en general no serán a_{ik} y su inverso los tensores utilizados para elevar o bajar subíndices o superíndices.

(2) Algunos autores, BRILLOUIN, por ejemplo, definen la derivada covariante de una densidad por una expresión que coincide con la que hemos elegido salvo en el último término donde aparece Π^{m}_{hm} en vez de Π^{m}_{mh}. Si la conexión afín es simétrica, ambas derivadas son iguales; si no lo es, difieren en un término que contiene el tensor de torsión.

Por consiguiente, dado que P^{ik} es simétrica,

$$\begin{aligned}\nabla_i \mathfrak{G}^{ik} &= \partial_i \mathfrak{G}^{ik} + \Pi^{i}_{mi} \mathfrak{G}^{mk} + \Pi^{k}_{mi} \mathfrak{G}^{im} - \Pi^{m}_{mi} \mathfrak{G}^{ik} \\ &= \partial_i \mathfrak{G}^{ik} + \Pi^{k}_{im} \mathfrak{G}^{im} + 2 S_{im}^{\cdot\cdot m} \mathfrak{G}^{ik},\end{aligned} \qquad [13]$$

donde

$$S_{mn}^{\cdot\cdot h} = \tfrac{1}{2} (\Pi^{h}_{mn} - \Pi^{h}_{nm})$$

es el tensor de torsión de la conexión genérica Π^{h}_{mn}. Basta sustituir el valor de $\partial_i \mathfrak{G}^{ik}$ deducido de [13] en [12_3] para poder afirmar que la derivada hamiltoniana de una densidad de la forma [1] cumple idénticamente la condición

$$\nabla_i \mathfrak{G}^{ij} = \left(\Pi^{j}_{ik} - \left\{ {j \atop i\ k} \right\} \right) \mathfrak{G}^{ik} + 2 S_{im}^{\cdot\cdot m} \mathfrak{G}^{ij},$$

cualquiera que sea la conexión afín Π^{j}_{ik}, con tal que a_{ik} sea simétrico y $||a_{ik}|| \neq 0$. Pues también $\mathfrak{G}^{ik}$ es simétrica, en la identidad anterior cabe reemplazar las componentes Π^{j}_{ik} por las de la conexión afín simétrica asociada a Π^{j}_{ik},

$$\Gamma^{j}_{ik} = \tfrac{1}{2} (\Pi^{j}_{ik} + \Pi^{j}_{ki}),$$

merced a lo cual dicha identidad toma la forma definitiva

$$\nabla_i \mathfrak{G}^{ij} = \left(\Gamma^{j}_{ik} - \left\{ {j \atop i\ k} \right\} \right) \mathfrak{G}^{ik} + 2 S_{im}^{\cdot\cdot m} \mathfrak{G}^{ij}. \qquad [14]$$

4. Hasta aquí las componentes Π^{j}_{ik} de la conexión afín son arbitrarias. Cualesquiera que sean, vale la identidad [14]. Pero impongamos a las Π^{j}_{ik} la condición de que las geodésicas de X_n relativas a la conexión Π^{j}_{ik} coincidan con las líneas (G) de la variedad X_n que son integrales del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} + \overset{*}{\Gamma}{}^{j}_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \qquad [15]$$

en el cual $\overset{*}{\Gamma}{}^{j}_{ik} = \overset{*}{\Gamma}{}^{j}_{ki}$ son funciones de $x^1, \ldots, x^n$ dadas. De una conexión afín Π^{j}_{ik} que admita las líneas (G) como geodésicas diremos que está *adaptada* a la familia (G) y es fácil demostrar (1) que la

(1) Cf. SCHOUTEN, pág. 76.

más general conexión afín adaptada a la familia (G) definida por [15] es

$$\Pi^{j}_{ik} = \overset{*}{\Gamma}{}^{j}_{ik} + \delta^{j}_{i} f_{k} + \delta^{j}_{k} f_{i} + S_{ik}^{\cdot\cdot j}, \qquad [16]$$

donde f_i es un vector covariante y $S_{ik}{}^{j}$ un tensor antisimétrico (ik), ambos arbitrarios. Con otras palabras, entre las conexiones adaptadas a (G) existen infinitas que poseen una torsión $S_{ik}{}^{j}$ dada, quedando a nuestra libre elección el campo de vectores covariantes f_i, lo que indica la posibilidad de determinar unívocamente las Π^{j}_{ik} si a las condiciones de estar adaptadas a (G) y dar lugar a una torsión prefijada $S_{ik}^{\cdot\cdot j}$ añadimos una nueva condición elegida convenientemente. Y, en efecto, de [16] se sigue

$$\Gamma^{j}_{ik} = \overset{*}{\Gamma}{}^{j}_{ik} + \delta^{j}_{k} f_{k} + \delta^{j}_{k} f_{i},$$

valores que, llevados a [14], nos dan

$$\nabla_i \mathfrak{G}^{ij} = \left(\overset{*}{\Gamma}{}^{j}_{ik} - \left\{ {j \atop i\,k} \right\} \right) \mathfrak{G}^{ik} + 2 (f_i + S_{im}^{\cdot\cdot m}) \mathfrak{G}^{ij}. \qquad [17]$$

Supongamos que $|\,\mathfrak{G}^{ij}\,|$ sea $\neq 0$, hipótesis cuya consideración está justificada por el hecho de existir densidades $\mathfrak{A}$ de la forma [1] cuyas derivadas variacionales respecto de las a_{ik} la satisfacen (1), es decir, *necesariamente* no es $\|\,\mathfrak{G}^{ij}\,\| = 0$. En estas condiciones existe la capacidad tensorial π_{ji} inversa de la densidad $\mathfrak{L}^{ij}$,

$$\pi_{ji} = \frac{\text{adjunto de } \mathfrak{L}^{ij}}{\|\,\mathfrak{L}^{ij}\,\|},$$

capacidad que es simétrica por serlo $\mathfrak{G}^{ij}$. Multipliquemos [17] por π_{jh} y contraigamos respecto del índice j. Se tendrá:

$$\pi_{jh} \nabla_i \mathfrak{G}^{ij} = \left(\overset{*}{\Gamma}{}^{j}_{ik} - \left\{ {j \atop i\,k} \right\} \right) \mathfrak{G}^{ik} \pi_{jh} + 2 f_h + 2 S_{hm}^{\cdot\cdot m}$$

---

(1) Por ejemplo, si $\mathfrak{A} = |g|^{\frac{1}{2}} R$, donde R es el escalar de curvatura de una métrica riemanniana, la derivada variacional respecto de g_{ik} es igual a $-|g|^{\frac{1}{2}} (R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R)$ (R^{ik} = tensor contracto de Ricci-Einstein. Cf. EDDINGTON, páginas 81 y 82). Según la teoría de la gravitación de Einstein con intervención del término cósmico, en el vacío es $R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R = -\lambda g^{ik}$. Claro está que la hipótesis pasa a ser un hecho en este caso como también en el de $\mathfrak{A} = \sqrt{|a|}$, ($a = \|a_{ik}\|$) que nos da $\mathfrak{G}^{ik} = \dfrac{\partial \mathfrak{A}}{\partial a_{ik}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{|a|}\, b^{ik}$ (+ para $a > 0$, — para $a < 0$).

y, por lo tanto,

$$f_h = S_{mh}^{\cdot\cdot m} + \tfrac{1}{2}\pi_{jh}\nabla_i \mathfrak{S}^{ij} + \tfrac{1}{2}\left(\left\{ {j \atop i\ k} \right\} - \overset{*}{\Gamma}{}^{j}_{ik}\right)\mathfrak{S}^{ik}\pi_{jh}, \qquad [18]$$

con lo que queda demostrado el siguiente teorema:

Dados (a), una densidad escalar $\mathfrak{A}$ función exclusivamente de las componentes a_{ik} de un tensor covariante simétrico tal que $\|a_{ik}\| \neq 0$; (b), una familia de líneas (G) de la variedad X_n definidas por un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma [15]; (c), un tensor $S_{ik}^{\cdot\cdot j}$, antisimétrico (ik), y (d), una densidad vectorial contravariante $\mathfrak{T}^j$, si las derivadas hamiltonianas $\mathfrak{S}^{ik}$ de $\mathfrak{A}$ respecto de las componentes del tensor a_{ik} son tales que $\|\mathfrak{S}^{ik}\| \neq 0$, existe, determinada y única, la conexión afín adaptada a la familia (G), cuyo tensor de torsión es el $S_{ik}^{\cdot\cdot j}$ y tal, además, que $\nabla_i \mathfrak{S}^{ij} = \mathfrak{T}^j$.

En particular, si se elige $S_{ik}^{\cdot\cdot j} = 0$, la conexión afín adaptada a (G) y respecto de la cual vale la ley de conservación $\nabla_i \mathfrak{S}^{ij} = 0$ es única, en las condiciones indicadas, e igual a

$$\Pi^j_{ik} = \overset{*}{\Gamma}{}^j_{ik} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}^{mn}\left(\left\{ {l \atop m\ n} \right\} - \overset{*}{\Gamma}{}^{l}_{mn}\right)(\delta^j_i \pi_{lk} + \delta^j_k \pi_{li}).$$

Luego, si $\overset{*}{\Gamma}{}^j_{ik} = \left\{ {j \atop i\ k} \right\}$, o sea, si las líneas (G) son las geodésicas de la conexión afín subordinada a la métrica riemanniana de tensor fundamental $g_{ik} = a_{ik}$, será $\overset{*}{\Pi}{}^j_{ik} = \Gamma^j_{ik} = \left\{ {j \atop i\ k} \right\}$ y la divergencia de la derivada hamiltoniana de *cualquier* densidad de la forma [1] es idénticamente nula. Es el teorema que demuestra Eddington (p. 141) y que constituye un caso muy particular consecuencia del teorema general que precede.

Octubre 1947.

Instituto «Daza de Valdés». Sección de Optica teórica.

BIBLIOGRAFIA

BRILLOUIN, L.—Les tenseurs en mécanique et en elasticité (París, Masson, 1938).

DE DONDER, TH.—Théorie des champs gravifiques (*Mém. Scienc. Math.*, XIV, París, Gauthier-Villars, 1926).

EDDINGTON, A. S.—The mathematical theory of relativity (Cambridge University Press, 1923).

SCHOUTEN, J. A.—Der Rici-Kalkül (Berlín, Springer, 1924).

20 CONTRIBUCION AL ESTUDIO DEL MICROSCOPIO DE RAYOS X. I, *por* Luis Brú y Mercedes Cubero.

SUMMARY

In the foregoing paper, while studying the new type X-ray microscope devised by Bragg, the authors establish a relationship between the phenomena due to light diffraction and those due to X-ray diffraction. The interpretation of plane grating diffraction diagrams and that of those pertainig to gratings formed by woven weft, has been made, and the form of the gratings was calculated from the data taken from the aforesaid diagrams. Applying Fourier's method, employed in determining crystalline structures with the aid of X-ray diffraction data, the authors have arrived at results which are in perfect accord with the ideas foreseen.

1.—Introducción teórica

El profesor Bragg ha publicado recientemente una serie de notas (1) en las que describe un método óptico que permite obtener, a partir de los datos de difracción de rayos X, las proyecciones Fourier, que dan una imagen de la estructura atómica del cristal que se estudia. Este método, que ha sido aplicado con éxito a algunos casos prácticos (2), ha sido denominado por Bragg «microscopio de rayos X», por ser, ahora, el método más directo para deducir una estructura cristalina a partir de la difracción de los rayos X.

El microscopio de rayos X de Bragg se basa en la analogía existente entre fenómenos de difracción de la luz y de los rayos X. sabido es que, según la teoría de Abbe, la imagen en el microscopio se forma por la recomposición de los espectros de Fraunhofer producidos por el objeto, de forma que, si nosotros lográramos reproducir los espectros de Fraunhofer, producidos por una red que fuese igual, pero de mayor tamaño, que la estructura atómica de un cristal, sería posible, por medio de un sistema óptico adecuado, obtener una imagen de esta estructura atómica. Como los espectros que se obtienen por medio de la difracción de los rayos X en los cristales, son análogos a los espectros de Fraunhofer, se puede, reproduciendo éstos a escala adecuada, obtener la estructura cristalina a partir de los datos experimentales.

En este trabajo vamos a señalar algunas relaciones formales que existen entre los fenómenos de difracción de los rayos X por los cristales y la difracción de la luz por redes bidimensionales. Este estudio tiene un indudable interés didáctico, pues permite llevar a escala óptica un cierto número de fenómenos que se verifican a escala atómica, y, usando esta analogía, dar un carácter más intuitivo al problema de la deducción de la estructura atómica.

Haremos uso en esta exposición de la nomenclatura y de las ecuaciones generales desarrolladas por el Dr. Garrido en su reciente memoria «El espacio recíproco y su aplicación a algunos problemas de la difusión de los rayos X» (3) y de algunas ideas desarrolladas por el mismo Dr. Garrido en las conferencias pronunciadas en la Cátedra de Física de la Universidad de Sevilla. Queremos ya aquí hacer constar nuestra gratitud por el interés creciente que viene manifestando por este trabajo, así como por sus imprescindibles consejos.

2. El vector de difusión.—Espacio recíproco

En la determinación de la estructura de un cristal por medio de los rayos X, juega un papel primordial el llamado *vector de difusión* (4).

Nos permitimos resumir aquí, rápidamente, algunos conceptos fundamentales.

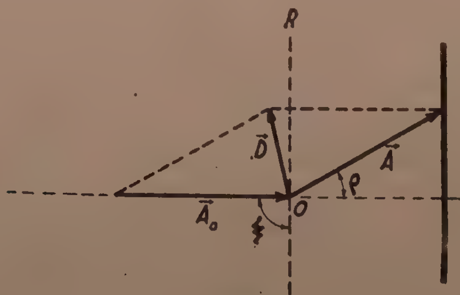


Figura 1

Sea (fig. 1) $\vec{A}_0$ el vector representativo del rayo incidente, que cae sobre el motivo difractor R y cuyo módulo es $1/\lambda$. Sea $\vec{A}$ la amplitud de la radiación difundida, en una cierta dirección. El vector $\vec{D} = \vec{A} - \vec{A}_0$ es el vector de difusión. La propia definición

nos indica que, si $\vec{A}_0$ es constante, $\vec{A}$ debe ser una función de $\vec{D}$. Pondremos:

$$\vec{A} = \Phi(\vec{D})$$

Los diferentes puntos del motivo difractor difundirán, en general, de modo distinto, y si fijamos la posición de estos puntos por medio de un vector $\vec{r}$, que los une a un origen arbitrario, podremos tomar para dar cuenta de aquella propiedad una cierta función $\rho = \varphi(\vec{r})$.

Entre las funciones $\varphi(\vec{r})$ y $\Phi(\vec{D})$ existe la siguiente relación:

$$\Phi(D) = \int_V e^{2\pi i \vec{D} \cdot \vec{r}} \varphi(\vec{r})\, dv \quad [1]$$

que es la misma que relaciona los espacios directo y recíproco. La integral anterior está extendida a todo el volumen v de la estructura difractiva.

Cuando se opera con rayos X, $\varphi(\vec{r})$ no es otra cosa que la densidad electrónica en el punto considerado. Esta densidad en el interior del cristal es una función triplemente periódica y puede representarse por una triple serie de Fourier de la forma siguiente:

$$\rho(x, y, z) = \Sigma_h \Sigma_k \Sigma_l A_{hkl} e^{2\pi i (h\vec{A}\vec{x} + k\vec{B}\vec{y} + l\vec{C}\vec{z})}$$

donde h, k, l son tres números enteros, x, y, z las coordenadas de un punto del cristal A_{hkl} un coeficiente característico de cada término, y $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ los vectores fundamentales del retículo recíproco.

De las propias definiciones de $\vec{D}$ y $\vec{r}$ resulta entonces:

$$\rho(x, y, z) = \Sigma_h \Sigma_k \Sigma_l e^{2\pi i \vec{D} \cdot \vec{r}} \quad [2]$$

Teniendo en cuenta [1] la aplicación del teorema de Fourier a cada una de las direcciones $\vec{D}$ nos permite escribir:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V e^{2\pi i \vec{D} \cdot \vec{r}} \Phi(\vec{D})\, dV \quad [3]$$

donde la integral está extendida a todo el volumen V del espacio recíproco.

Si comparamos [2] y [3] vemos que se trata de relaciones análogas. Podemos, por tanto, poner:

$$A_{hkl} = \int_V e^{2\pi i \vec{D} \cdot \vec{r}} \varphi(\vec{r})\, dv \qquad [4]$$

en donde la integral está extendida a todo el volumen del cristal.

Esta última fórmula, que es en realidad la misma [1], nos permite conocer la forma del espacio de difracción, si conocemos las características del motivo difractor. La expresión [3], por el contrario, nos permite conocer las características del cuerpo difractor a partir de los datos de su espectro correspondiente.

3. En esta primera parte de nuestro trabajo, nos ocuparemos solamente de las ideas fundamentales y del estudio de algunos casos sencillos. Calcularemos mediante la expresión [4] las amplitudes difundidas en cada dirección del espectro, por redes planas de forma y dimensiones conocidas; y, mediante la [3], la forma y dimensiones de dichas redes a partir de los datos suministrados por el diagrama de difracción.

En nuestro caso particular, la función $\varphi(\vec{r})$ no es otra cosa que la transparencia para la luz de cada punto del objeto. Como las redes utilizadas son, sencillamente, orificios practicados en una sustancia opaca para la luz, $\varphi(\vec{r})$ está íntimamente ligado con el tamaño del orificio por el que pasa la luz, y se conserva constante. Por otra parte, como se trata de redes bidimensionales, las integrales [1] y [4] habrá que extenderlas a la superficie de la red. En efecto, por ser el ángulo ρ muy pequeño, los extremos del vector $\vec{D}$ están prácticamente en un plano.

La primera red estudiada por nosotros consiste en una serie de orificios circulares, del mismo diámetro, equidistantes a lo largo de dos direcciones perpendiculares. El motivo difractor tiene, pues, centro de simetría, y la expresión [4] se reduce a:

$$\Phi(\vec{D}) = A_{hkl} = \int_S \cos 2\pi (\vec{D} \cdot \vec{r})\, ds$$

Para calcular las amplitudes A_{hkl} recurriremos a un método gráfico, tomando el suficiente número de sumandos para poder despreciar el error que pueda cometerse. Del examen de la figura 2 se desprende el camino que hemos seguido para ello.

Escribiremos, pues:

$$A_{hkl} = \Sigma \Delta S \cos 2\pi D \cdot r \cos \widehat{D \cdot r} \qquad [5]$$

Si λ es la longitud de onda de la luz utilizada, se tiene:

$$D = 2 \frac{\operatorname{sen} \frac{\rho}{2}}{\lambda}$$

Figura 2

Si la luz incide normalmente a la red ($\xi = 90°$) ocurre que $\widehat{D \cdot r} = \frac{\rho}{2}$; por tanto, la expresión [5] podemos escribirla así:

$$A_{hkl} = \Sigma \Delta S \cos 2\pi r \frac{\operatorname{sen} \rho}{\lambda} \qquad [6]$$

que es la que utilizaremos para el cálculo de las amplitudes de los espectros obtenidos bajo incidencia normal (fig. 3).

Para el cálculo de la forma de la red, es decir, de la transparencia en cada punto, se emplea, por análogas razones, la expresión:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_S \cos 2\pi (\vec{D} \cdot \vec{r})\, dS$$

que se reduce a

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y) = \Sigma_h \Sigma_k A_{hk} \cos 2\pi \left(\frac{hx}{a} + \frac{ky}{b}\right) \qquad [7]$$

Los coeficientes de la doble serie de Fourier son, pues, las amplitudes de cada máximo del espectro, cuyos valores numéricos se obtienen fotometrando los diagramas de difracción. Con respecto a los signos de estos coeficientes, vamos a ver que, en el caso de redes planas sencillas, su cálculo no es difícil y que, por tanto, es posible utilizar el método Fourier.

En efecto, el diagrama de difracción de una red es el mismo

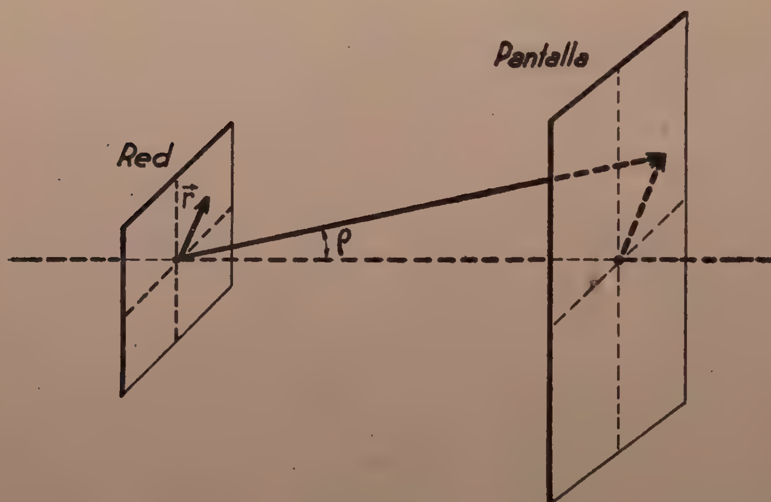


Figura 8

que el del motivo que en ella se repite, cruzado por bandas oscuras en ambas direcciones que tienen su origen en las interferencias de la luz difractada por cada motivo, y cuya distancia depende de los espaciados respectivos. Entonces podremos representar gráficamente la amplitud difractada por un solo motivo y ver los máximos que se encuentran en las diferentes regiones de ordenadas positiva y negativa. Esta gráfica puede trazarse sin el previo conocimiento de la forma de la red, cuando menos en los casos estudiados. Para calcular los signos de las amplitudes en una cierta dirección, la [0—1] del espectro, por ejemplo, tomaremos como positivo el valor A_{01} y se traza la gráfica, viéndose si los valores de A_{02}, A_{03},

etcétera, coinciden con los obtenidos a partir del fotometrado. Si no sucede así, hay que proceder por tanteos, cambiando convenientemente los signos, hasta lograr que los valores de las amplitudes satisfagan a la gráfica obtenida (fig. 4).

El cálculo detallado de la forma de la red a partir de los datos del diagrama de difracción es de gran interés, pues aun cuando un examen microscópico de la misma nos dé su forma de un modo más directo, pueden escapar, como hemos de ver, algunos detalles. Por eso, si queremos tener una idea completa y exacta de la forma

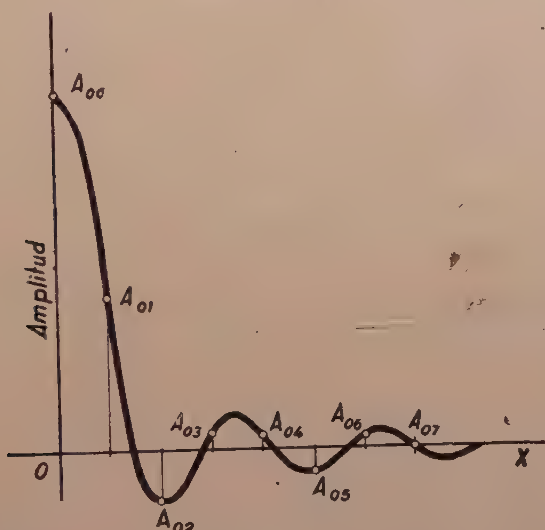


Figura 4

de la red, debemos unir el diagrama de difracción a la microfotografía de la misma.

El diagrama de difracción, como veremos en el caso de redes formadas por una trama de hilos, por contener una representación estadística de todas las propiedades de la red, hace que toda periodicidad que en ella figure tenga aquí su representación clara; y, a veces, esta periodicidad es de período tan grande que puede escapar a nuestra percepción, por no haber sido observada más que una parte de ella. Es, pues, de gran interés la interpretación de todos los detalles del diagrama de difracción de una red, y ver la relación entre su estructura y las posiciones e intensidades de cada uno de los máximos observados. Estos detalles son extraordinariamente valiosos cuando la incidencia no es normal a la red.

PARTE EXPERIMENTAL

Las redes estudiadas en esta primera parte son:

1.° Red de orificios circulares iguales.

2.° Redes tejidas. (Tramas.)

Se han utilizado telas cuidadosamente tejidas y aforadas procedentes de fábricas francesas, con objeto de lograr los mejores resultados posibles.

El primer estudio se ha realizado con una red constituída por un conjunto de orificios circulares iguales, equidistantes en dos direcciones perpendiculares, taladrados en un cartón. Tomando como base el conocimiento de la forma de la red, hemos calculado las intensidades de los máximos de difracción, aplicando la ecuación [5] y comprobando que coinciden con las que realmente se observan.

Para obtener los diagramas de difracción hemos utilizado el siguiente artificio (fig. 5):

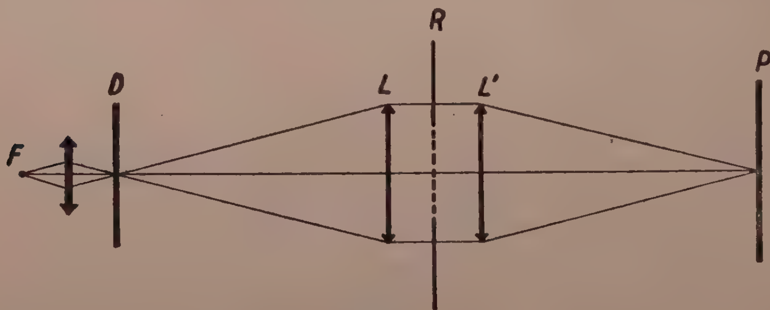


Figura 5

La red de difracción R está colocada entre dos lentes convergentes L y L'. La potencia de la primera lente es de 0,5 dioptrías La de la segunda es variable, según el objeto a que se destine el diagrama que se quiere obtener. El diagrama D es un orificio circular de diámetro variable desde 0,5 a 0,1 mm. El foco F es una lámpara de vapor de mercurio Philips Philora—450 W—provista de un filtro naranja. En P se coloca la placa fotográfica que se impresiona directamente o bien intercalando un microscopio con cámara fotográfica.

Cartón perforado. Interpretación del diagrama de difracción.—*a*) El examen microscópico de esta red (fot. 1) formada por un cartón taladrado con orificios circulares iguales nos da el diámetro del orificio y es espaciado o distancia entre los taladros en ambas direcciones. Las características de esta red son (fig. 6):

Diámetro del orificio $d=0,6$ mm.

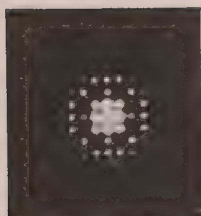
Espaciados. $\begin{cases} a=1,07 \text{ mm.} \\ b=1,04 \text{ mm.} \end{cases}$

b) Para obtener los diagramas de difracción se ha seguido el método anteriormente indicado.

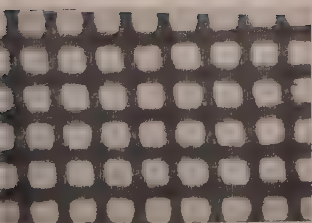
La fotografía 2 muestra la imagen ampliada del diagrama de la red. En



1



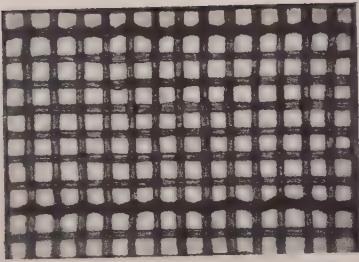
2



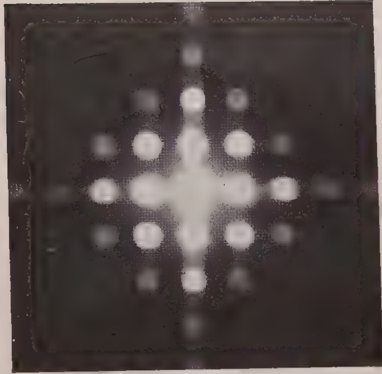
3



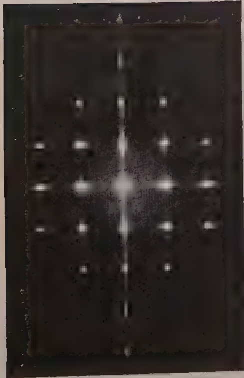
4



5



6



7

P se colocó una cámara fotográfica. La lente L' es de 130 cm. de distancia focal y el diafragma de 0,5 mm. Se obtienen así gran número de máximos pero muy pequeños. A fin de conseguir máximos más extensos se ha utilizado

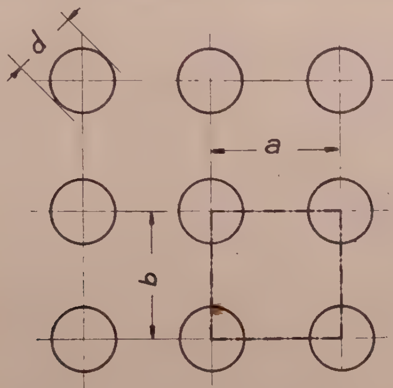


Figura 6

para el fotometrado el diagrama obtenido con un diafragma de 0,5 mm. y cambiando la lente L' por otra de 5 dioptrías. En P se ha dispuesto un microscopio provisto de cámara fotográfica.

c) *Cálculo de la intensidad de los máximos.*—Para calcular la amplitud de los máximos de difracción aplicaremos la fórmula

$$\text{Amplitud} = \Phi(\vec{D}) = \int_S \cos 2\pi(\vec{D}\,\vec{r})\, d\,S \qquad [5]$$

indicada anteriormente, que nos suministra el valor de $\Phi(\vec{D})$ en cada punto, cuando se opera con una red bidimensional con centro de simetría.

Ahora bien

$$D = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\rho}{2}}{\lambda}$$

y, si la incidencia es normal, $\widehat{Dr} = \frac{\rho}{2}$. Por tanto, si tomamos un número finito de sumandos, la expresión [5] se puede escribir así:

$$\text{Amplitud} = \Sigma\, \Delta\, S \cos 2\pi \left(\frac{r \cdot \operatorname{sen} \rho}{\lambda} \right)$$

El número de sumandos se elige en cada caso de modo que el error al despreciar los restantes, pueda ser admitido.

Veamos, por ejemplo, el cálculo de la amplitud del máximo (2—0).

Se tiene en él

$$\frac{\operatorname{sen} \rho}{\lambda} = 1{,}1$$

Hemos dibujado a escala arbitraria el motivo cuya forma sabemos por la microfotografía (1). En la tabla adjunta se resumen las operaciones necesa-

rias para el cálculo de la amplitud. En la primera columna consignamos los valores de r (distancia del centro del motivo a cada una de las franjas en que éste se ha dividido). Los distintos valores de ΔS representan las áreas de dichas franjas.

r	ΔS	$\cos 2\pi \frac{r \operatorname{sen} \rho}{\lambda}$	$\Delta S \cos$	Sumas
0,00625	600	1	600	
0,01875	600	0,98	590	
0,03125	599	0,93	560	
0,04375	596	0,86	513	
0,05625	592	0,78	463	
0,06875	587	0,69	405	
0,08125	579	0,56	325	
0,09375	573	0,44	252	
0,10625	563	0,3	170	
0,11875	553	0,15	83	
0,13125	541	0		+3961
0,14375	529	—0,15	— 79	
0,15625	513	—0,26	—150	
0,16875	499	—0,43	—215	
0,18125	477	—0,57	—274	
0,19375	459	—0,69	—317	
0,20625	436	—0,78	—340	
0,21875	412	—0,87	—360	
0,23125	380	—0,94	—360	
0,24375	350	—0,98	—345	
0,25625	310	—1	—310	
0,26875	265	—1	—265	
0,28925	210	—0,98	—206	
0,29375	215	—0,94	—116	
				—3337

Suma : 3.961—3.337 = 624

Resultado : Amplitud del máximo (2—0), ampl. = 624.

Repitiendo los cálculos para cada máximo obtendremos las amplitudes difundidas en cada dirección, en relación con la amplitud del máximo central. Los resultados son:

Máximo	Amplitud	Máximo	Amplitud	Máximo	Amplitud
(0—0)	11.346	(3—3)	268	(8—1)	245
(1—0)	7.337	(4—4)	—200	(3—2)	—537
(2—0)	625	(5—5)	—318	(5—2)	—233
(3—0)	—1.498	(6—6)	246	(6—2)	—315
(4—0)	155	(2—1)	—311	(7—2)	256
(5—0)	453	(4—2)	629	(4—3)	460
(6—0)	—306	(3—1)	—1.490	(5—3)	—200
(7—0)	—318	(4—1)	160	(6—3)	—300
(8—0)	242	(5—1)	450	(7—3)	250
(1—1)	4.691	(6—1)	—310	(5—4)	—315
(2—2)	—1.599	(7—1)	—310	(6—4)	—318
				(7—4)	242

Las intensidades relativas (proporcionales a los cuadrados de las amplitudes) concuerdan con las observadas en los diagramas.

PROBLEMA INVERSO

a) *Cálculo de la forma de la red a partir de los datos del diagrama.*—Para poder resolver este problema es preciso conocer los valores de las intensidades (ennegrecimientos) de los diferentes máximos obtenidos en el diagrama de difracción.

Lo primero que hemos tenido que hacer es lograr que estos máximos no se reduzcan a puntos, sino que alcancen una superficie relativamente grande. Para ello se han modificado las condiciones experimentales utilizando un diafragma grande (0,5 mm.) y una lente de campo L′ de mucha convergencia.

El fotometrado de los diagramas ha presentado una gran dificultad, pues carecemos de este aparato en el laboratorio, así como de los elementos necesarios para su construcción. Resolvimos el problema empleando una escala de ennegrecimiento y comparando con ella la intensidad de cada máximo. Para ello dispusimos sobre un soporte nuestro diagrama y la escala, cubriendo ambas con una cartulina negra provista de dos taladros, del mismo diámetro, uno sobre el máximo cuya intensidad se quiere medir y otro sobre la escala de ennegrecimiento que puede deslizar por debajo de él. Ambos orificios se iluminan, observándose la luz que dejan pasar a través de un sistema de prismas de reflexión total, análogo al usado en los colorímetros. El campo visual se encuentra así dividido en dos regiones cuya igualación puede lograrse deslizando la escala de ennegrecimiento.

Los máximos centrales, cuya intensidad es tan grande que no se conserva ya proporcional al ennegrecimiento, han de fotometrarse en otra placa con menos tiempo de exposición. Los resultados obtenidos son, pues, sólo aproximados. Los valores de las amplitudes están consignados en el cuadro siguiente:

Máximo	Amplitud	Signo	Máximo	Amplitud	Signo
(0—0)	100	+	(3—2)	4	—
(0—1)	70	+	(2—2)	11	—
(0—2)	6	+	(3—3)	0	
(0—3)	13	—	(3—1)	13	+
(0—4)	0		(4—3)	3	+
(0—5)	3	+	(5—1)	3	+
(1—1)	40	+	(5—2)	2	+

b) *Cálculo de los signos de las amplitudes.*—Siguiendo el método que indicamos en la parte general, calcularemos los signos de las amplitudes difundidas en la dirección (0—1) que nos servirán para conocer el de todas las direcciones por existir simetría de revolución en el motivo.

La gráfica obtenida está representada en la figura 7, pudiendo deducirse de ella que los respectivos signos de las amplitudes son los consignados en la tabla anterior.

c) *Obtención de la forma de la red.*—Al considerar una red bidimensional las fórmulas establecidas en el capítulo anterior nos permiten escribir para la función $\varphi(\vec{r})$ la siguiente expresión:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y) = \Sigma_h \Sigma_k A_{hk} \cos 2\pi \left(\frac{hx}{a} + \frac{ky}{b}\right)$$

Siendo h y k los correspondientes índices de Miller y a y b los lados del rectángulo elemental ($a = b$).

La función $\varphi(x, y)$ en la dirección del eje X; $(y=0)$ puede escribirse así:

$$\varphi(x, o) = \Sigma_h \Sigma_k A_{hk} \cos 2\pi \frac{hx}{a} = \Sigma_h A_{hk} \cos 2\pi \frac{hx}{a}$$

Es decir:

$$\varphi(x, o) = (A_{00} + A_{01} + A_{02} + \ldots) + (A_{10} + A_{11} + A_{12} + \ldots) \cos 2\pi \frac{x}{a} +$$

$$+ (A_{20} + A_{21} + A_{22} + \ldots) \cos 2\pi \frac{2x}{a} + \ldots; \text{ etc.}$$

Calculando la suma para varios valores de X se obtiene la distribución ra-

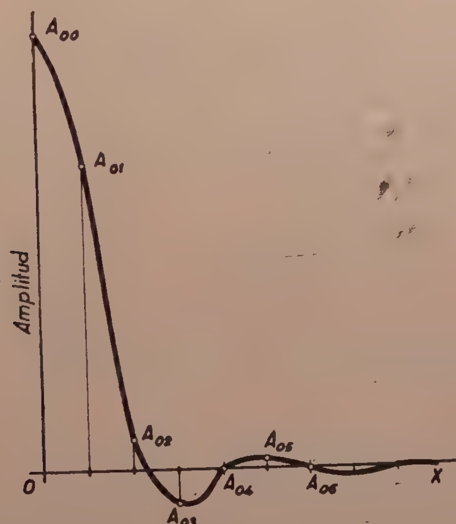


Figura 7

dial. Como en el motivo estudiado hay simetría de revolución, son suficientes estos datos para dibujar la red.

Dividiendo el espaciado a en diez partes se han obtenido los siguientes resultados:

$X=0$;	$X=a$;	$\varphi(X \,.\, 0)=261$
$X=0{,}1\,a$;	$X=0{,}9\,a$;	» $=246$
$X=0{,}2\,a$;	$X=0{,}8\,a$;	» $=220$
$X=0{,}3\,a$;	$X=0{,}7\,a$;	» $=122$
$X=0{,}4\,a$;	$X=0{,}6\,a$;	» $=85$
$X=0{,}5\,a$;	X	» $=83$

cuya representación gráfica se encuentra en la figura 8. Como se ve, esta representación da cuenta perfecta de la forma del motivo difractor constituído por orificios circulares iguales.

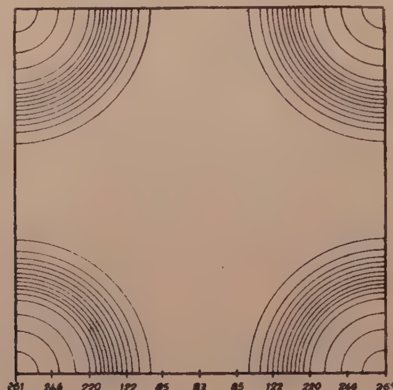


Figura 8

ESTUDIO DE LA TRAMA 2

a) El examen microscópico de esta red nos suministra los valores numéricos de los espaciados en cada dirección y la forma y dimensiones de los orificios que permiten el paso de la luz. Reproducimos una microfotografía de la

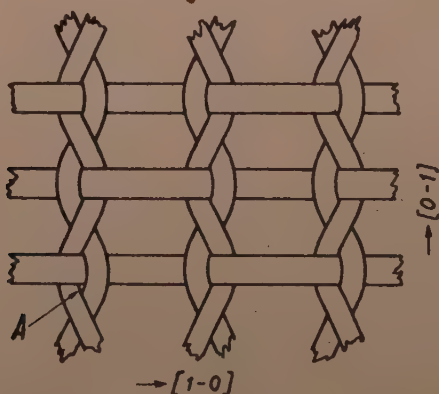


Figura 9

red (3), viéndose en la figura 9 un dibujo de la misma. Se trata de una trama sencilla, cuyos orificios son todos de la misma forma y dimensiones.

Existe, pues, una sola periodicidad en cada dirección, que representamos en la figura 10 juntamente con las dimensiones medidas en la microfoografía. El espaciado en ambas direcciones es $\alpha = 0{,}3$ mm.

b) Para la obtención de los diagramas se sigue el método expuesto en la parte general.

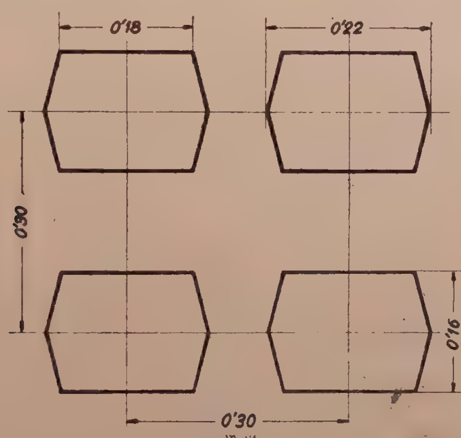


Figura 10

En la fotografía (4) del diagrama de difracción, el diafragma colocado entre el foco luminoso es de 0,6 mm. L' de 5 dioptrías y en P colocamos un microscopio.

c) *Cálculo de la intensidad de los máximos del diagrama de difracción.* El cálculo de la forma de $\Phi(\vec{D})$ en cada punto es igual que en la red anteriormente estudiada. Como los orificios tienen centro de simetría, calculamos la amplitud por la fórmula :

$$\text{Amplitud} = \Delta S \cos 2\pi \frac{r \ \text{sen}\ \rho}{\lambda}$$

Veamos, por ejemplo, el cálculo detallado de la intensidad de los máximos (1—0) y (1—3).

Máximo (1—0).—Dividimos la malla en cuarenta y cuatro franjas.

Tomando como unidad de medida de superficie el área de la franja primera se obtiene el siguiente cuadro de valores :

r	S	$\cos 2\pi \dfrac{r \cdot \text{sen}\, \rho_{(1-0)}}{\lambda}$	ΔS cos	Sumas
0,0025	1	1	1	
0,0075	1	0,99	0,99	
0,0125	1	0,97	0,97	
0,0175	1	0,94	0,94	
0,0225	1	0,9	0,9	
0,0275	1	0,84	0,84	
0,0325	1	0,77	0,77	
0,0375	1	0,72	0,72	
0,0425	1	0,65	0,65	
0,0475	1	0,57	0,57	
0,0525	1	0,47	0,47	
0,0575	1	0,36	0,36	
0,0625	1	0,27	0,27	
0,0675	1	0,16	0,16	
0,0725	1	0,06	0,06	
0,0775	1	—0,01	—0,01	8,8
0,0825	1	—0,13	—0,13	
0,0875	1	—0,23	—0,23	
0,0925	0,8	—0,32	—0,25	
0,0975	0,6	—0,41	—0,24	
0,1025	0,35	—0,52	—0,18	
0,1075	0,11	—0,6	—0,06	—1,1

Resultado: Amplitud $(1-0) = 7{,}7$.

Máximo (1—3).—Dividimos la malla en cuarenta franjas (fig. 11). El error

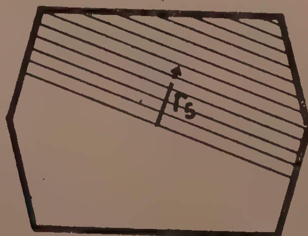


Figura 11

que en este caso se somete es despreciable frente a la ventaja que supone el conservar los mismos valores de los radios *r*, es decir, la misma anchura en las franjas.

$$\frac{\text{sen}\, \rho_{(1-3)}}{\lambda} = 10{,}7$$

Los resultados son :

r	ΔS	$\cos 2\pi \frac{6 \cdot \text{sen}\, \rho_{(1-3)}}{\lambda}$	$\Delta S \cos$	Sumas
0,0025	1,33	0,99	1,31	
0,0075	1,33	0,88	1,17	
0,0125	1,33	0,62	0,62	
0,0175	1,33	0,42	0,56	
0,0225	1,33	0,11	0,15	
0,0275	1,32	—0,19	—0,25	4,01
0,0325	1,32	—0,48	—0,63	
0,0375	1,31	—0,74	—0,97	
0,0425	1,30	—0,92	—1,2	
0,0475	1,30	—1	—1,3	
0,0525	1,29	—0,98	—1,26	
0,0575	1,28	—0,86	—1,1	
0,0625	1,06	—0,66	—0,7	
0,0675	0,88	—0,4	—0,35	
0,0725	0,73	—0,08	—0,06	
0,0775	0,63	0,22	0,14	—7,81
0,0825	0,45	0,53	0,39	
0,0875	0,3	0,77	0,23	
0,0925	0,16	0,92	0,15	
0,0975	0,03	1	0,03	0,75

Resultado: Amplitud del máximo (1—3)=—3,05.

Se ha hecho el cálculo de todos los máximos visibles en la placa en las direcciones (1—0), (0—1) y (1—1), viendo que los resultados son concordantes con los valores relativos de las intensidades observadas en el diagrama.

PROBLEMA INVERSO

a) *Fotometrado del diagrama.*—Empleamos la fotografía (4), en la que los máximos son de gran superficie. Siguiendo el método indicado en el caso de la red estudiada anteriormente, se obtienen los siguientes valores relativos de las amplitudes:

Máximo	Amplitud	Máximo	Amplitud	Máximo	Amplitud
(0—0)	3,5	(0—6)	—0,3	(4—0)	0,5
(0—1)	1,8	(0—8)	0,1	(5—0)	—0,3
(0—2)	—0,3	(1—0)	1,5	(7—0)	0,1
(0—3)	—0,5	(2—0)	—0,7	(1—1)	1
(0—4)	0,4	(3—0)	—0,2	(5—1)	—0,3
(0—5)	0,2	(4—1)	0,4	(1—2)	—0,3
(2—1)	—0,5	(8—1)	—0,1	(3—3)	—0,1
(7—1)	0,1	(3—2)	0,3	(5—2)	—0,1
(6—2)	0,1	(1—3)	—0,4	(2—3)	0,1
(4—3)	0,1	(1—4)	0,4	(1—6)	0,2

Hemos dado los valores de las amplitudes con los signos obtenidos por el procedimiento indicado en los casos anteriores, trazando la gráfica de las amplitudes en las direcciones (0—1) (fig. 12) y en las (1—0) y (1—1) (figs. 13 y 14).

En estas figuras las zonas no rayadas quieren tener en cuenta las bandas oscuras que cruzan la imagen de difracción, originadas por las interferencias de la luz difractada por cada motivo, tal y como ya habíamos indicado.

b) *Obtención de la forma de la red.*—Si sólo quiere tenerse una idea previa de la forma de la red, obtenida de un modo rápido, puede calcularse la proyección de la estructura sobre una o varias direcciones, en cuyo caso el cálculo de $\varphi(r)$ se simplifica mucho. Hemos calculado la proyección de la estructura sobre las direcciones de los máximos (1—0), (0—1) y (1—1) del diagrama, obteniéndose los resultados consignados en las figuras 15, 16 y 17, de las cuales pueden sacarse las conclusiones siguientes, que nos dan una idea aproximada de la forma de la red:

1.ª Las anchuras máximas de cada orificio de los que forman el motivo difractor, en cada una de las dos direcciones perpendiculares de los máximos (0—1) y (1—0) del espectro, están, entre sí, en la relación 4:3, concordando con lo observado en la microfotografía.

2.ª El trenzado en la dirección de la parte estrecha del motivo es más grueso que el que existe en la dirección perpendicular.

3.ª Si bien los detalles pequeños de la forma de la gráfica, tales como las ordenadas de los $x=0,1\,a$ y $x=0,98\,a$ (fig. 16), y las del punto $x=0,5\,a$ en la figura 15, no ofrecen mucha garantía, por no ser exactos los valores de las amplitudes obtenidos del fotometrado del diagrama, pueden ser interpretados como producidos por el paso de luz en los puntos análogos al A de la figura 9.

c) *Cálculo de la proyección bidimensional.*—Se ha dividido el espaciado en cada dirección en diez partes. El valor de $\varphi(r)$ habría que obtenerse en cien puntos, pero por razón de simetría sólo es necesario el cálculo de la cuarta parte del motivo.

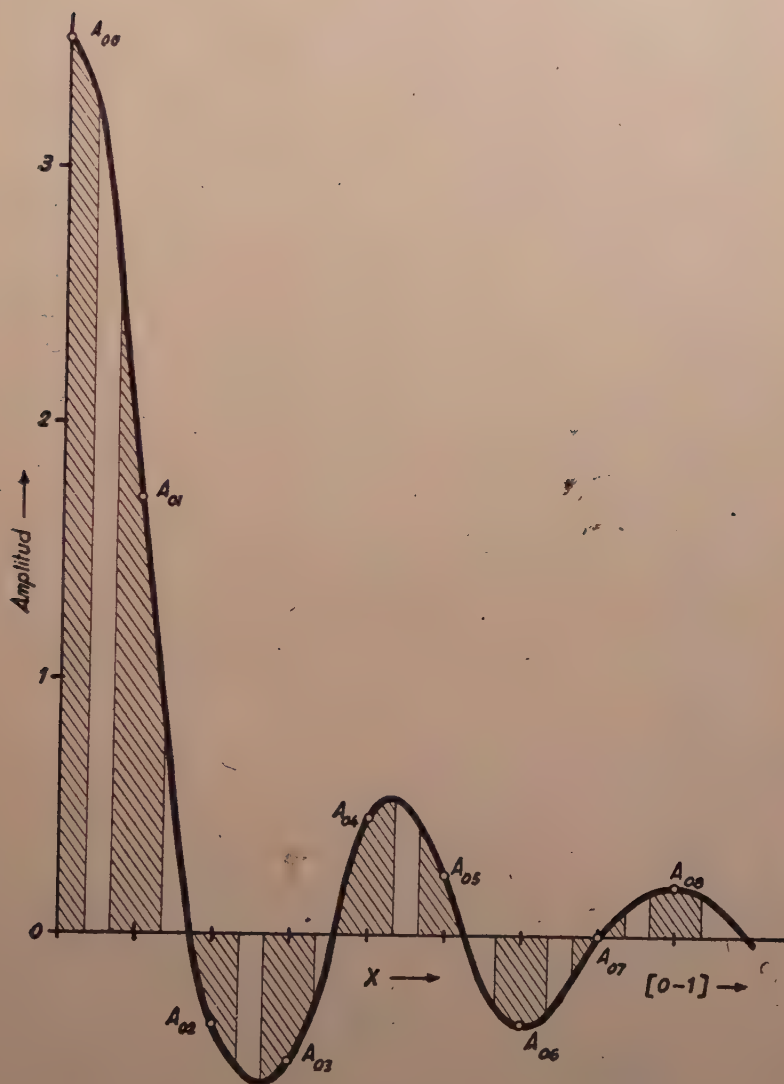


Figura 12

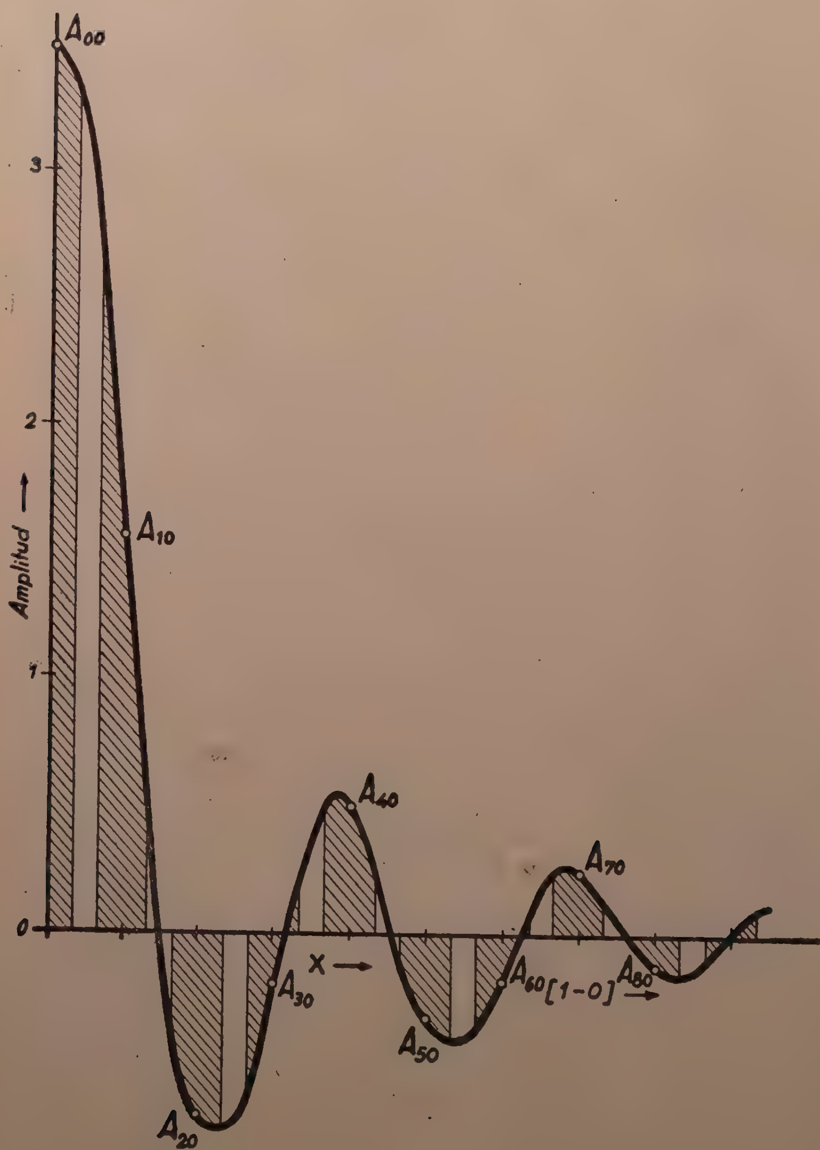


Figura 18

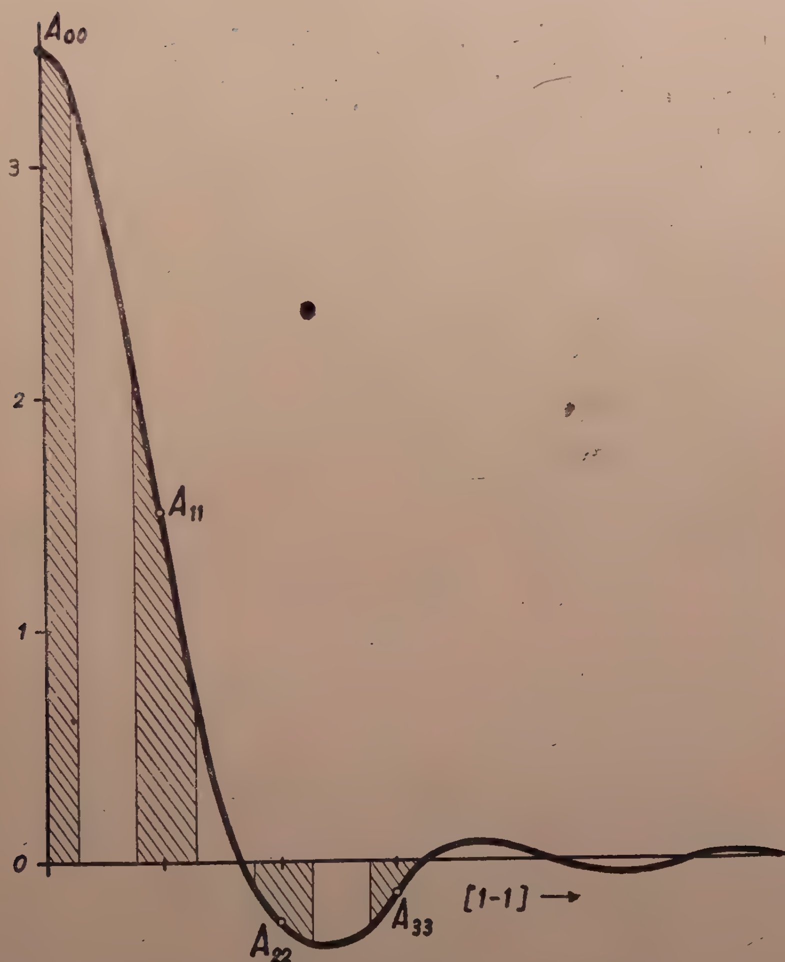


Figura 14

La expresión de la transparencia en cada punto de ordenada 0 es

$$\varphi(x, 0) = (A_{00} + A_{01} + A_{02} + \ldots) + (A_{10} + A_{11} + A_{12} + \ldots) \cos 2\pi \frac{x}{a} +$$

$$+ (A_{20} + A_{21} + A_{22} + \ldots) \cos 2\pi \frac{2x}{a} + \ldots, \quad \text{etc.}$$

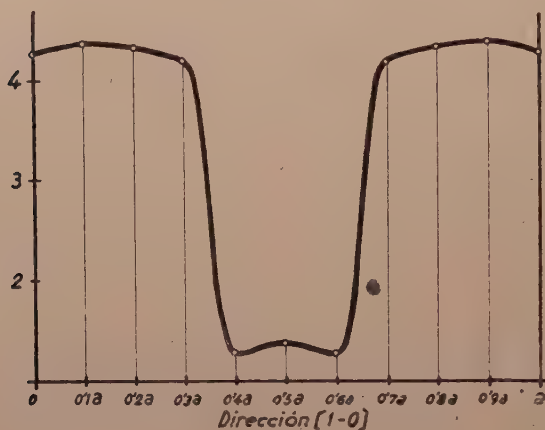


Figura 15

Se ha hecho el cálculo para diez valores de x, desde $x=0$ hasta $x=a$.
En el caso de puntos cuyas abscisas y ordenadas no son nulas, la expre-

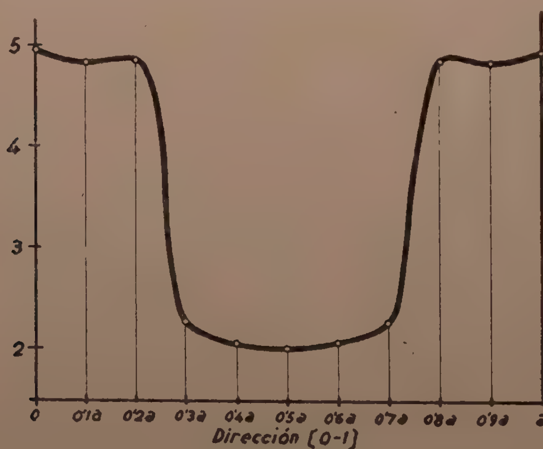


Figura 16

sión es más complicada. Calculamos, por ejemplo, el valor de $\varphi(r)$ en el punto $x=0,5\,a$, $y=0,4\,b$.

$$\varphi(x, y) = \Sigma_h \Sigma_k A_{hk} \cos 2\pi (h \cdot 0 \cdot 5 + k \cdot 0 \cdot 4) = \Sigma_k A_{0k} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 4 k +$$
$$+ \Sigma_k A_{1k} \cos 2\pi (0 \cdot 5 + 0 \cdot 4 k) + \Sigma_k A_{2k} \cos 2\pi (1 + 0 \cdot 4 k) +$$
$$+ \Sigma_k A_{3k} \cos 2\pi (1 \cdot 5 + 0 \cdot 4 k) + \Sigma_k A_{4k} \cos 2\pi (2 + 0 \cdot 4 k) +$$
$$+ \Sigma_k A_{5k} \cos 2\pi (2 \cdot 5 + 0 \cdot 4 k) + \Sigma_k A_{6k} \cos 2\pi (3 + 0 \cdot 4 k) +$$
$$+ \Sigma_k A_{7k} \cos 2\pi (3 \cdot 5 + 0 \cdot 4 k) + \Sigma_k A_{8k} \cos 2\pi (4 + 0 \cdot 4 k) =$$
$$= A_{00} + A_{01} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 4 + A_{02} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 8 + A_{03} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 2 +$$
$$+ A_{04} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 6 + A_{05} \cos 2\pi + A_{06} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 4 + A_{08} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 2 +$$
$$+ A_{10} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 5 + A_{11} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 6 + A_{12} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 3 + A_{13} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 7 +$$
$$+ A_{14} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 1 + A_{16} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 9 + A_{20} \cos 2\pi + A_{21} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 4 +$$
$$+ A_{23} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 2 + A_{30} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 5 + A_{32} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 3 + A_{33} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 7 +$$
$$+ A_{40} \cos 2\pi + A_{41} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 4 + A_{43} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 2 + A_{50} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 5 +$$
$$+ A_{51} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 9 + A_{52} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 3 + A_{62} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 8 + A_{70} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 5 +$$
$$+ A_{71} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 9 + A_{81} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 4 =$$
$$= A_{00} + (A_{01} + A_{06} + A_{21} + A_{41} + A_{81}) \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 4 + (A_{02} + A_{62}) \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 8 +$$
$$+ (A_{03} + A_{05} + A_{23} + A_{43} + A_{63}) \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 2 + A_{04} \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 6 +$$
$$+ (A_{05} + A_{20}) \cos 2\pi + (A_{10} + A_{30} + A_{50} + A_{70}) \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 5 +$$
$$+ (A_{11} + A_{16} + A_{51} + A_{71}) \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 9 + (A_{12} + A_{32} + A_{52}) \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 3 +$$
$$+ (A_{13} + A_{33}) \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 7 + (A_{14}) \cos 2\pi \cdot 0 \cdot 1 = 1{,}5$$

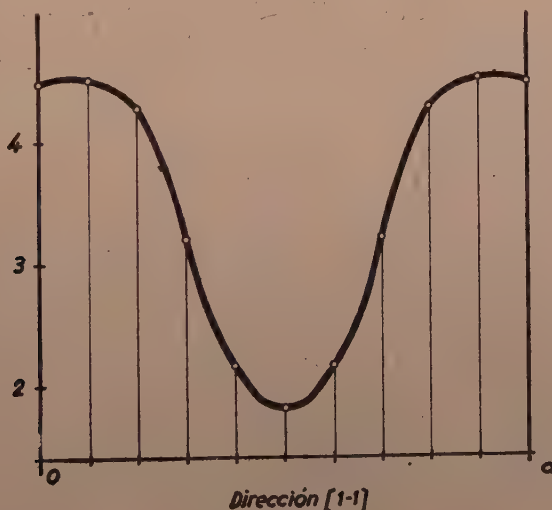


Figura 17

Repitiendo el cálculo para los veinticinco puntos que constituyen la cuarta parte del motivo, obtendremos el valor de la transparencia en dichos puntos. Los resultados están consignados en la tabla siguiente:

$\frac{x}{a} =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$y\ b = 0$	6,5	6,5	6	6,5	1	2
0,1	6	6	6	1	0,5	2
0,2	6	6,5	6,5	0	0,5	1
0,3	2,5	2,5	1,5	0,5	0,1	1
0,4	2	2	1,5	0,1	1	0,5
0,5	1,5	1,5	1,5	1	1,5	1

que conducen a la gráfica de la figura 18. Como puede observarse, la coinci-

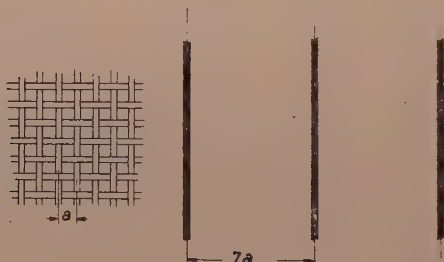


Figura 18

dencia de la forma obtenida con la que se observa en la microfotografía es muy aceptable.

ESTUDIO DE LA TRAMA NUM. 4

El estudio de la difracción en las redes que siguen se hará atendiendo principalmente a la interpretación de detalles del diagrama que ofrezcan algún interés, por no encontrarse en las precedentes redes detalles análogos, pero suprimiendo algunos cálculos por considerarlos una repetición de los ya estudiados.

El examen microscópico nos da la forma y dimensiones de la trama (fot. 5).

Como se ve, en la dirección horizontal se presenta una sola periodicidad y en la dirección perpendicular dos periodicidades: una, de espaciado siete veces mayor que la primera, motivada por encontrarse trenzado un hilo después de cada seis. Puede considerarse como un conjunto de dos redes superpuestas; una de ellas es una red tejida, sencilla, y la otra está formada por una serie de bandas paralelas separadas por un espacio $7\ a$, tal como se representa en la figura 19.

Como siempre que existen redes superpuestas, la imagen de difracción será la de la red de espaciado menor, formándose en cada máximo de esta imagen

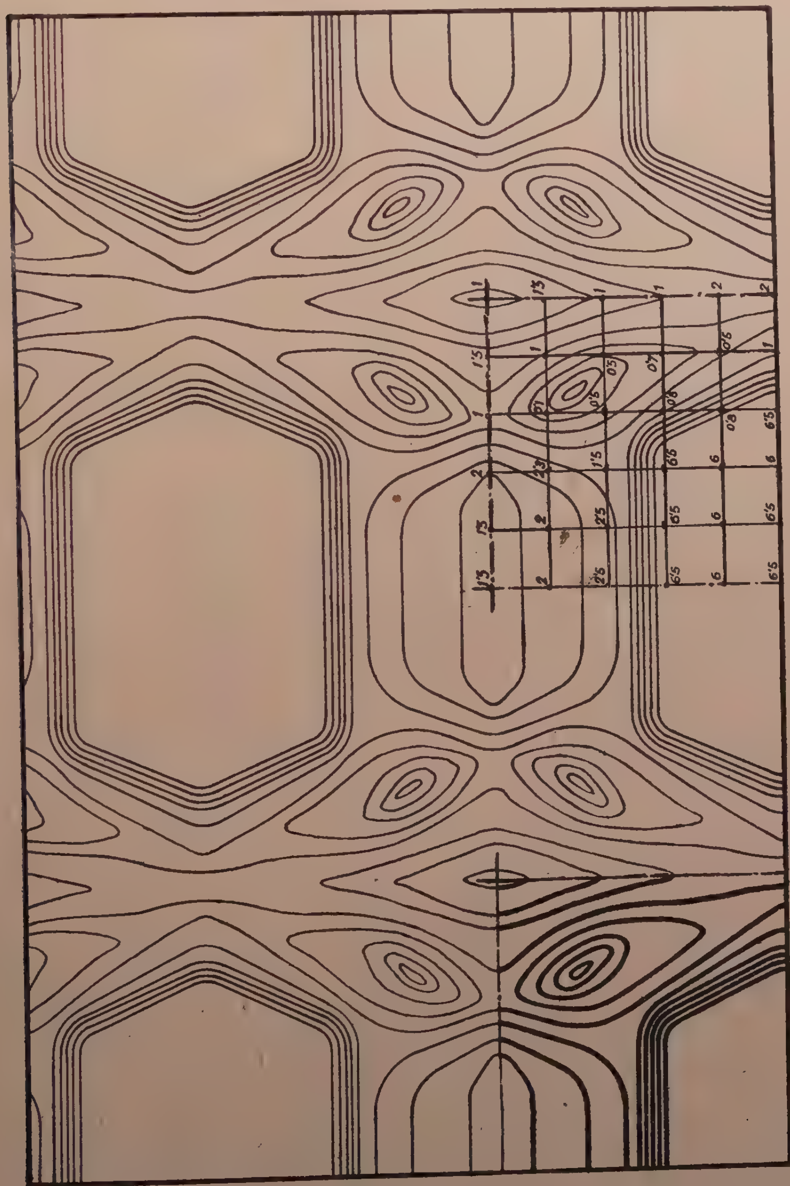


Figura 19

la de la red de espaciado mayor. Si obtenemos un diagrama de máximos de gran superficie, para utilizarlos en el fotometrado (6), la segunda periodicidad

apenas es perceptible. Pero si el diagrama tiene los máximos suficientemente puntuales (7), aparecen entre cada dos máximos fundamentales, correspondientes a la difracción en la red, representada en la parte izquierda de la figura 19, como era de esperar, siete máximos originados por la red de espaciado $7a$ superpuesta a la anterior.

Continuamos el trabajo interpretando los diagramas de difracción de las tramas estudiadas, así como de otras más complicadas, cuando la incidencia no es normal, pues por no ser las tramas redes planas, al girar, no sólo se produce la deformación consiguiente del motivo, sino también la aparición de nuevos tipos de periodicidades.

Comprobamos además la reciprocidad de la red y su imagen, efectuando la difracción sobre la propia imagen de difracción de otra red.

También se están estudiando con éxito la difracción en proyecciones de retículos recíprocos de redes cristalinas, para obtener directamente la proyección de la estructura del cristal.

BIBLIOGRAFIA

(1) W. L. Bragg.—*Nature*, 143, 1939, 678.
(2) W. L. Bragg.—*Nature*, 154, 1944, 69.
(3) J. Garrido.—*Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*. Tomo II, 1947.
(4) J. Garrido y J. Orland.—Los rayos X y la estructura fina de los cristales. Madrid, 1946.

Universidad de Sevilla. Laboratorio de Física. Instituto «A. G. Rocasolano»
C. S. de I. C.

21 RELACION DE ABSORCION EN EL ULTRAVIOLETA DE LOS ISOMEROS DE LA COPRO Y UROPORFIRINA, *por*

FRANCISCO POGGIO Y JOAQUÍN OTERO DE LA GÁNDARA.

SUMMARY

The absorption ratios in the range 404-410 for coproporphyrin I and III and uroporphyrin I and III are determined, and different values are found for each one of them, thus showing that the spectrocolorimetric assay methods are inaccurate, inasmuch as, for these wave lengths, either one of them is used as a standard in the assay of the others.

De poco tiempo a esta parte se ha mostrado de gran interés en Medicina, la valoración de copro y uroporfirina que en cantidades normales o patológicas se encuentran contenidas en los líquidos biológicos. Las dificultades de valoración de estos pigmentos por vía química han resultado hasta el momento insuperables, ya que se trata de compuestos relativamente lábiles, que se encuentran en cantidades pequeñísimas, del orden de la milésima de miligramo y de los cuales no se conocen reacciones químicas que los diferencien netamente de los otros pigmentos con que normalmente se encuentran mezclados. Las únicas técnicas que se han mostrado verdaderamente útiles para la valoración, han sido las técnicas ópticas: espectro-colorimetría, espectro-fotometría y fluorescencia. De estas tres técnicas por las que actualmente trabajan los investigadores, la de máxima sensibilidad es la de fluorescencia que llega a delatar las menores cantidades de porfirinas (del orden de 1 γ). Fué puesta en punto por Vandenbergh y Grotepass (1) y por Fikentscher y Franke (2) y (3), habiendo intervenido después diversos investigadores en su perfeccionamiento. El mayor inconveniente de esta técnica, está en lo poco específica de la fluorescencia y en la facilidad con que al hacer la extracción pasan otros pigmentos también fluorescentes que enmascaran o al menos perturban la valoración. Será condición indispensable para utilizar esta técnica, una perfecta purificación de los extractos de porfirinas obtenidos de los líquidos que se analizan; problema difícil y que si se extrema mucho da lugar a pérdidas bastante considerables, que Fischer (4) llega a valuar hasta en un 20 %. La técnica espectro-colorimétrica, por la que han trabajado las escuelas alemanas y actualmente al-

gunas norteamericanas, tiene el inconveniente de ser relativa, es decir: hay que operar con un patrón de porfirinas con un contenido conocido, y con relación a él hacer la valoración en un espectro-colorímetro. No es fácil disponer en todos los laboratorios de muestras de porfirinas, pero aun disponiendo de ellas, las soluciones se alteran con bastante facilidad. Carrié (5) afirma que, convenientemente conservadas en la oscuridad llegan a durar hasta seis meses, y experimentalmente hemos encontrado nosotros que algunas veces apenas duran unos días a poca luz un poco intensa, que les dé sobre todo las soluciones de uroporfirina y mucho más sensible todavía son las de protoporfirina. De manera que al disponer de una solución patrón de porfirinas no tendremos la certeza, necesaria para el análisis, de conocer exactamente su contenido.

Queda finalmente la técnica espectro-fotométrica, que es *absoluta* y no necesita, por tanto, patrón de referencia. En ella, conocida una constante propia de cada sustancia para una longitud de onda elegida, constante que llamamos *relación de absorción* (inversa del coeficiente de extinción específico), basta multiplicar por ella el coeficiente de extinción de la misma longitud de onda de la solución desconocida para obtener la concentración que se busca. El conocimiento, pues, de esta relación de absorción, nos permitirá hacer valoraciones absolutas prescindiendo de los inconvenientes de las otras dos técnicas, de aquí el interés de la determinación de esta constante física para los pigmentos que han de valorarse espectralmente.

Pero todavía hay más que tratar sobre la técnica espectro-colorimétrica, porque Mertens (6) propone utilizar un patrón de coproporfirina y con él valorar no sólo la copro, sino también la uroporfirina. Como el poder absorbente de uno y otro pigmento es distinto, estimamos incorrecta esta manera de proceder, que a pesar de todo, se ha extendido mucho, más o menos modificada, aunque sin alterar lo sustancial.

Por todas las razones que anteceden estimamos necesario hacer una cuidadosa determinación de la relación de absorción de la copro y uroporfirina, distinguiendo los isómeros I y III de cada una de ellas, que son los de interés biológico. La determinación la hacemos en la zona ultravioleta, que es la de máxima sensibilidad, utilizando el máximo de absorción que presentan estos pigmentos en la zona 404-410. De esta manera y mediante esta constante se podrá prescindir de los patrones, siempre inseguros y, además, se

establecerá si los dos isómeros de cada uno de los pigmentos, es decir, la copro I y la copro II, así como la uro I y la uro III tienen la misma o distinta relación de absorción. Esto es fundamental, ya que encontrándose en unos casos uno y en otros el otro isómero, será necesario si se quiere proceder a una valoración rigurosa determinar primero, de qué isómero se trata, para saber qué valor de la constante de absorción es necesaria aplicarle.

Para este trabajo disponíamos de una muestra del tetra-metil-ester de la coproporfirina III que hace ya años nos remitió el profesor Fischer de Munich, de una muestra de tetra-metil-ester de la uroporfirina III que nos remitió la señorita E. Mertens de Hamburgo, y finalmente, de muestras de coproporfirina I y uroporfirina I extraídas por nosotros de la orina de un enfermo afecto de porfiria congénita, las cuales purificamos hasta conseguir perfecta coincidencia de sus puntos de fusión y espectros con los indicados por Fischer (7).

Dada la gran fotosensibilidad de estos pigmentos, estimamos imprescindible hacer una prueba previa de estabilidad durante la valoración espectral, ya que para obtener los espectrogramas de valoración necesitamos exponer las soluciones de porfirinas a la luz ultravioleta de la chispa eléctrica entre electrodos de acero al wolframio.

Para ello preparamos una solución clorhídrica de cada una de las porfirinas y llenando con ellas una cubeta del aparato, la sometimos a tiempos de irradiación creciente, en las mismas exactas condiciones en que habían de estar para la valoración. De minuto en minuto se impresionó un espectrograma de cada una de ellas, hasta un total de media hora, tiempo que sobrepasa bastante al de una valoración corriente. Los espectros obtenidos para cada una de las porfirinas fueron todos idénticos entre sí del primero al último, lo cual muestra que para la intensidad luminosa del foco que utilizamos y el tiempo de irradiación empleado no hubo ninguna alteración de los pigmentos, o en otras palabras, que en las condiciones en que operamos es válida la valoración espectral.

Para el trabajo espectral hemos utilizado un espectrógrafo Zeiss con óptica de cuarzo, cubetas logarítmicas de Scheibe y sector giratorio, las placas fotográficas han sido las de fabricación nacional Valca.

Para determinar la relación de absorción hemos elegido el máximo de absorción que presentan en la zona ultravioleta las copro-

porfirina I y III en las 404 μμ, y las uroporfirinas I y III en las 410 μμ. Estos máximos corresponden a los puntos de mayor sensibilidad a las variaciones de concentración de ambas porfirinas, por ser los de mayor coeficiente de extinción y, por lo tanto, los más apropiados para las valoraciones. Como caen al límite de la zona visible, Schumm (8) los ha utilizado para valoraciones visuales espectro-colorimétricas.

Coproporfirina I.—Se hicieron dos pesadas de tetrametil ester de la coproporfirina I después de tener el producto veinticuatro horas en desecador. Las dos cantidades pesadas se trataron en un matraz aforado con una cantidad conocida de ácido clorhídrico concentrado, dejándolo así otras veinticuatro horas para lograr la saponificación del ester. Pasado este tiempo se diluyó con agua destilada hasta el envase. La concentración a que quedó el ácido fué del 5 %.

De cada una de estas dos soluciones madres, se prepararon a su vez otras dos soluciones más diluídas, haciéndose la dilución con ácido clorhídrico al 5 %. Las concentraciones de estas soluciones, calculadas teniendo en cuenta la dilución, son las que figuran en la tabla I, en su primera columna; en la segunda incluímos los valores del coeficiente de extinción hallado en las 404 μμ, ε_{404}; y en la tercera, los que resultan para el cociente $\frac{c}{\varepsilon}$ que es lo que llamamos relación de absorción.

TABLA I

Solución núm.	Concentración de coproporfirina I calculada en grs/cc.	Valor de ε_{404} hallado	Valor que resulta para la relación de absorción $\frac{c}{\varepsilon}$
1	$12,8 \times 10^{-6}$	5,80	$2,20 \times 10^{-6}$
2	$5,12 \times 10^{-6}$	2,60	$1,96 \times 10^{-6}$
3	$1,28 \times 10^{-6}$	0,657	$1,95 \times 10^{-6}$
4	$0,64 \times 10^{-6}$	0,33	$1,94 \times 10^{-6}$

La disolución más concentrada da un valor para la relación de absorción, que se aparta sobre un 12 % del que resulta para las otras tres soluciones, que son perfectamente concordantes. Por lo

tanto, para un dominio de concentraciones que va de 0,6 a 5 microgramos por c.c., la relación de absorción tiene un valor medio de $1,95 \times 10^{-6}$.

Coproporficina III.—Se hicieron tres pesadas del tetrametilester que se saponificaron primero y se diluyeron después, preparándose en ellas como soluciones madres otras más diluídas.

Las soluciones madres tenían las siguientes concentraciones:

Solución núm. 1: 5 mgrs. de coproporfirina disuelta en 1.000 centímetros cúbicos de A. clorhídrico al 5 %.

Solución núm. 2: 5,2 mgrs. de coproporfirina disuelta en 1.000 centímetros cúbicos de A. clorhídrico al 5 %.

Solución núm. 3: 5 mgrs. de coproporfirina disuelta en 1.000 centímetros cúbicos de A. clorhídrico al 5 %.

El volumen de ácido clorhídrico en que se disolvió cada pesada se había calculado previamente para que el máximo de las 404 $\mu\mu$ saliera en las cubetas mayores, porque en ellas los valores de ε cambian con saltos más pequeños que en las cubetas de menor espesor. La solución madre núm. 3 se diluyó para que resultara a la misma concentración que la primera, pero al preparar las soluciones diluídas, se operó con volúmenes de 20 a 30 c. c., mientras que con la primera se había operado con 2 ó 3, así disminuíamos los errores de medida. Los resultados, sin embargo, fueron concordantes.

En la tabla II se indican las concentraciones calculadas para las soluciones diluídas, los valores hallados para ε y los que resultan por cálculo para la relación de absorción.

TABLA II

Solución núm.	Concentración de coproporfirina III calculada en grs/cc.	Valor de ε_{404} hallado	Valor que resulta para la relación de absorción $\frac{c}{\varepsilon}$
1	$5,12 \times 10^{-6}$	4,13	$1,239 \times 10^{-6}$
2	$5,12 \times 10^{-6}$	4,13	$1,239 \times 10^{-6}$
3	$0,65 \times 10^{-6}$	0,522	$1,24 \times 10^{-6}$
4	$0,136 \times 10^{-6}$	0,104	$1,30 \times 10^{-6}$
5	$0,136 \times 10^{-6}$	0,106	$1,28 \times 10^{-6}$
6	$0,102 \times 10^{-6}$	0,0826	$1,239 \times 10^{-6}$
7	$0,102 \times 10^{-6}$	0,0826	$1,239 \times 10^{-6}$
8	$0,085 \times 10^{-6}$	0,0657	$1,29 \times 10^{-6}$
9	$0,085 \times 10^{-6}$	0,0657	$1,29 \times 10^{-6}$

El valor medio que resulta de estas nueve determinaciones concordantes es de $1,26 \times 10^{-6}$, expresada la concentración en gramos por c. c.

Uroporfirina I.—Se prepararon dos disoluciones madres, y a partir de ellas, cuatro diluídas, con las que se operó de modo análogo a como se ha descrito para la anterior.

En la tabla III se indican las concentraciones calculadas para las soluciones diluídas; los valores hallados para ε_{410} y los calculados para la relación de absorción.

TABLA III

Solución núm.	Concentración de uroporfirina I calculada en grs/cc.	Valor de ε_{410} hallado	Valor que resulta para la relación de absorción de $\frac{c}{\varepsilon}$
1	$7,04 \times 10^{-6}$	4,80	$1,46 \times 10^{-6}$
2	$2,816 \times 10^{-6}$	2,07	$1,35 \times 10^{-6}$
3	$0,704 \times 10^{-6}$	0,522	$1,34 \times 10^{-6}$
4	$0,352 \times 10^{-6}$	0,26	$1,35 \times 10^{-6}$

También en este caso, lo mismo que en la coproporfirina I, la solución más concentrada da un valor divergente de las más diluídas, que son concordantes entre sí con el valor $1,35 \times 10^{-6}$, expresada la concentración en grs./c. c.

Uroporfirina III.—Se prepararon tres disoluciones madre y a partir de ellas, las nueve diluídas que se indican en la tabla IV con los valores de ε_{410} hallados y los calculados para la relación de absorción.

TABLA IV

Solución núm.	Concentración de uroporfirina III calculada en grs/cc.	Valor de ε_{410} hallado	Valor que resulta para la relación de absorción $\frac{c}{\varepsilon}$
1	$19,00 \times 10^{-6}$	3,30	$5,76 \times 10^{-6}$
2	$7,60 \times 10^{-6}$	1,33	$5,71 \times 10^{-6}$
3	$7,50 \times 10^{-6}$	1,30	$5,77 \times 10^{-6}$
4	$5,70 \times 10^{-6}$	0,99	$5,75 \times 10^{-6}$
5	$3,80 \times 10^{-6}$	0,657	$5,78 \times 10^{-6}$
6	$3,75 \times 10^{-6}$	0,657	$5,71 \times 10^{-6}$
7	$1,90 \times 10^{-6}$	0,329	$5,77 \times 10^{-6}$
8	$0,75 \times 10^{-6}$	0,13	$5,77 \times 10^{-6}$
9	$0,375 \times 10^{-6}$	0,0657	$5,77 \times 10^{-6}$

El valor medio en este caso es de $5,75 \times 10^{-6}$, expresando la concentración en grs./c.c.

Como resumen de lo anteriormente expuesto resultan los siguientes valores de la relación de absorción para los isómeros I y III de las copro y uro porfirinas:

Coproporfirina I ... ... $1,95 \times 10^{-6}$
Coproporfirina III ... ... $1,26 \times 10^{-6}$
Uroporfirina I ... ... $1,35 \times 10^{-6}$
Uroporfirina III ... ... $5,75 \times 10^{-6}$

Los valores distintos de la relación de absorción que indican poderes absorbentes tan diversos, particularmente entre la coproporfirina III y uroporfirina III, hacen que no pueda, en modo alguno, usarse un patrón de una de ellas para valorar espectro-colorimétricamente otra, como es costumbre hacerlo en diversas técnicas que hoy día se emplean en los laboratorios clínicos. Una solución de coproporfirina III y otra de uroporfirina III de cuádruple concentración, que la primera tendrá sencillamente el mismo coeficiente de extinción en las 404-410 $\mu\mu$, respectivamente. Es más, para las mismas valoraciones espectrales absolutas, es necesario hacer previamente una caracterización cualitativa, no tan sólo de la por-

firina de que se trata, sino del tipo de isómero I o III que se valora, y no serán válidas las valoraciones de mezclas en proporciones desconocidas, por desconocer también el valor de la relación que debe aplicarse.

Instituto de Optica «Daza de Valdés». Sección de espectros y Cátedra de Espectroscopia aplicada de la Facultad de Medicina de Madrid.

BIBLIOGRAFIA

(1) H. van der Bergh y Grotepass.—Klin. Wschr 586, 1934.

(2) Fikentscher y Franke.—Klin. Wschr, 285, 1934.

(3) Fikentscher.—Biochem. Ztschr, 249, 257, 1933.

(4) Fischer.

(5) Schreus y Carrié.—Klin. Wschr, 146, 1933 y 1.670, 1934.

(6) E. Mertens.—Klin, Wochenschrift, 23, 26, 1944.

(7) H. Fischer y H. Orth.—Die Chemie des pyrrols. Leipzig, 1937. Edición Edwards Brothers.

NOTAS

22. NOTA SOBRE LA RELACION ENTRE EL PODER SEPARADOR DE UN INSTRUMENTO OPTICO Y EL UMBRAL DIFERENCIAL DEL SISTEMA PERCEPTOR, *por* C. SÁNCHEZ DEL RÍO.

SUMMARY

A table which shows the relationship tetbween the resolving power of an optical instrument and the differential threshold of the observer is suggested in the foregoing note. It has been calculated taking into account Fraunhorfer's diffraction patterns.

Aunque se corrigiesen perfectamente las aberraciones de un sistema óptico, siempre tendría un límite su poder de resolución por la falta de estigmatismo que origina la difracción por la montura del sistema. Si se trata de representar dos objetos puntuales próximos, sus imágenes, que son manchas de difracción, se superponen. Para que a la vista de estas imágenes superpuestas pueda decidirse si se trata de un objeto o de dos, es necesario que en la mancha total se perciban dos máximos de intensidad; para ello es imprescindible que la diferencia de intensidades entre dichos máximos y el mínimo que exista entre ellos, sea mayor que el umbral diferencial del sistema de observación (ojo, placa fotográfica, célula fotoeléctrica, etc.). En la presente nota se da una tabla (1)—calculada a requerimiento de la Sección de Optica Fisiológica de este Instituto—que relaciona el umbral diferencial del receptor de radiaciones con la mínima distancia que puede existir entre dos fuentes puntuales de igual intensidad para que sean separables con un cierto instrumento.

Para el cálculo de dicha tabla se ha partido de la siguiente

(1) La tabla que aparece en el reciente libro de *G. A. Boutry*, Optique Instrumentale. Measson et Cie. Paris, 1946, págs. 328-332, es a todas luces, insuficiente.

fórmula (2), que da la distribución de intensidades I, salvo una constante, dentro de la figura de difracción (de Fraunhofer) producida con una fuente puntual por un diafragma circular:

$$I = \left[\frac{2\, J_1(x)}{x}\right]^2 \qquad [1]$$

con

$$x = \frac{2\pi}{\lambda} R \rho \qquad [2]$$

aquí J_1 representa la función de Bessel de primer orden, λ la longitud de onda de la luz empleada, R el radio del diafragma circular y ρ el ángulo, en radianes, que forma con el eje (normal al diafragma en su centro) el segmento que une el centro del diafragma con el punto donde se trata de evaluar la intensidad. La magnitud x que determina, en unidades convencionales, la posición del punto, dentro de la figura de difracción donde se calcula la intensidad, se emplea sistemáticamente.

Si se trata de dos focos puntuales, de igual intensidad, cuya separación en las unidades convencionales introducidas, es $2a$ la distribución de la luz, viene dada por

$$I = \left[\frac{2\, J_1(x+a)}{x+a}\right]^2 + \left[\frac{2\, J_1(x-a)}{x-a}\right]^2 \qquad [3]$$

Esta función presenta dos máximos principales próximos a $x \pm a$ y un mínimo para $x = 0$. La diferencia de intensidades de los máximos y el mínimo depende de la separación de las dos fuentes $2a$ y se ha obtenido calculando para cada a la marcha de la función [3] (3). En la tabla I aparece la citada dependencia; la separación de las fuentes se mide por la magnitud $k = 2\,\frac{a}{\pi}$, y la diferencia de intensidades en tantos por ciento, es decir, en

$$100 \cdot \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max}}.$$

(2) En esta fórmula se presuponen ondas planas y no se tienen en cuenta inhomogeneidades de amplitud. Pero se ha adoptado por simplicidad y para obtener una relación independiente de las características de los sistemas que se tratan de estudiar. Otras fórmulas pueden verse en:
H. H. Hopkins.—*Proc. Phys. Soc.*, **55**, 116 (1943).
G. Lansraux.—*Rev. d'Opt.*, **26**, 24 (1947).

(3) Para la función de Bessel J_1 se han utilizado las tablas de E. Janhke y F. Emde. Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Teubner. Leipzig und Berlín 1933, pág. 229.

La medida de la separación en unidades $2\frac{a}{\pi}$ es la más conveniente, puesto que según la relación [2] para pasar de la separación $2a$, medida en unidades convencionales, al ángulo ρ subtendido desde el centro del diafragma, hace falta aplicar la fórmula

$$\rho = k \frac{\lambda}{D}$$

siendo $k = \frac{2a}{\pi}$ y D el diámetro ($= 2R$) del diafragma.

En la figura 1 se ha representado gráficamente la marcha de la función expresada en la tabla.

TABLA I.

k	$\frac{I_M - I_m}{I_M} \cdot 100$	k	$\frac{I_M - I_m}{I_M} \cdot 100$	k	$\frac{I_M - I_m}{I_M} \cdot 100$	k	$\frac{I_M - I_m}{I_M} \cdot 100$
0,986	1,0	1,066	7,5	1,124	14,0	1,174	20,5
0,996	1,5	1,071	8,0	1,128	14,5	1,178	21,0
1,004	2,0	1,076	8,5	1,132	15,0	1,182	21,5
1,011	2,5	1,081	9,0	1,136	15,5	1,186	22,0
1,017	3,0	1,086	9,5	1,140	16,0	1,190	22,5
1,024	3,5	1,090	10,0	1,144	16,5	1,194	23,0
1,030	4,0	1,095	10,5	1,148	17,0	1,197	23,5
1,035	4,5	1,100	11,0	1,152	17,5	1,200	24,0
1,040	5,0	1,104	11,5	1,156	18,0	1,204	24,5
1,044	5,5	1,108	12,0	1,159	18,5	1,208	25,0
1,050	6,0	1,112	12,5	1,163	19,0	1,212	25,5
1,056	6,5	1,116	13,0	1,167	19,5	1,216	26,0
1,061	7,0	1,120	13,5	1,171	20,0	1,220	26,4

De los valores de una y otra se deduce que el contraste (umbral diferencial) que supone el criterio de Lord Rayleigh ($k = 1,220$) es un 26,4 %.

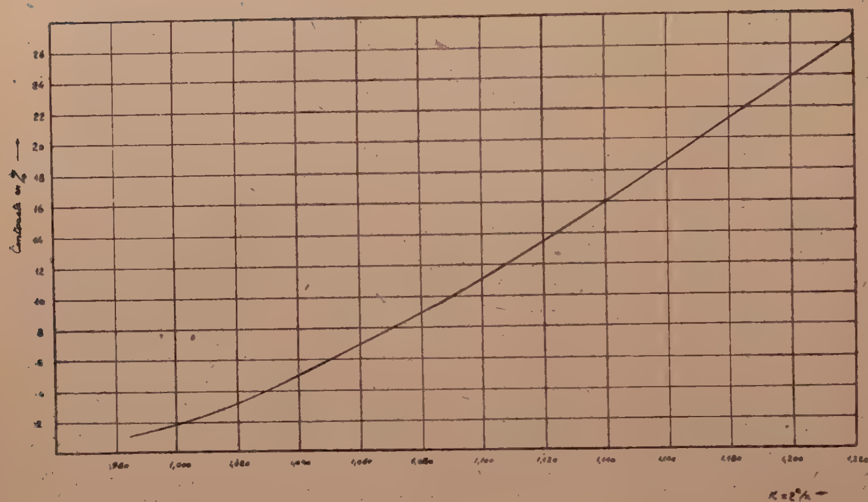


Figura 1

Instituto de Optica «Daza de Valdés».
Sección de Optica Física.

23. LA COMPONENTE VERTICAL DESCENDENTE DEL VIENTO EN GRANADA, *por* ANTONIO DÚE ROJO, S. I.

SUMMARY

Working with the first results obtained with the aid of a new vertical anemograph built in the Cartuja Observatory, the author analises the general trend and frequency curve of the descending vertical atmospheric current, and compares it with the ascending horizontal current which has already been studied in previous papers. It should be noted that some anomalous cases, which bear a certain relationship to sharp changes in the atmospheric conditions, are observed.

Aunque existen instrumentos registradores muy perfectos y de indudable superioridad respecto del que recientemente se ha construído en el Observatorio de Cartuja para el registro independiente de los dos sentidos opuestos de la componente vertical del viento, sin embargo, la escasez de semejantes aparatos en los demás observatorios hace muy difícil hallar trabajos meteorológicos publicados sobre esta materia en las revistas científicas.

Por haberlo hecho ya en otro lugar (1), no daremos aquí sino unas brevísimas indicaciones sobre el nuevo anemógrafo, que en sustancia se reduce a dos cilindros metálicos verticales, uno para cada sentido de la corriente vertical, en cuyo interior hay sendas esferas huecas también metálicas, sujetas al extremo de palancas que pueden girar sobre un eje horizontal y cuyo extremo opuesto a cada esfera lleva un inscriptor para trazar la gráfica sobre papel ahumado, con objeto de reducir a un mínimo el rozamiento.

Por la misma razón antes expuesta, no se tratará aquí de los resultados obtenidos en el registro de la corriente vertical ascendente, ya estudiada en líneas generales, sino tan sólo de la descendente, de la que aún no se ha publicado resultado alguno, por no disponer hasta ahora de material para ello, ya que la reforma del aparato se hizo a principios de 1947, separando ambos sentidos en el registro. Con los elementos disponibles daremos solamente una primera idea de tales resultados, pero suficiente para descubrir aspectos interesantes sobre esta clase de corrientes de aire.

(1) *Dos nuevos aparatos registradores del Observatorio de Cartuja.* Congreso de la A. E. P. C. en San Sebastián (1946).

Tiene este fenómeno físico un efecto vulgar bien conocido, que se manifiesta por la dificultad que se nota en el tiro de las chimeneas en determinadas circunstancias, que la atención popular no observa con suficiente diligencia para fundar sobre ello conclusiones útiles.

Es evidente que cualquier corriente atmosférica, al llegar al suelo, ha de modificar su curso, y que en la hipótesis de ser éste un plano horizontal, la componente vertical ha de anularse ; pero basta un declive no muy pronunciado en el terreno, para que dicha componente se ponga de manifiesto en un aparato registrador de sensibilidad correspondiente : y éste es nuestro caso, así en lo que toca al instrumento, como en la disposición de los terrenos que rodean al Observatorio de Cartuja.

En efecto, la explanada en que se halla el edificio principal y el campo meteorológico, está algo elevada sobre los terrenos próximos, situados en la ladera de una serie de colinas que corren de N. a S., en su vertiente W., y casi en todos los casos estudiados comenzaron a registrarse estas corrientes al cambiar el viento a alguno de los rumbos comprendidos en los cuadrantes primero y segundo ; es decir, que procedían, como era de esperar, de masas de aire superficiales procedentes de la parte superior de las colinas.

Al examinar las gráficas del año 1947, donde las veinticuatro horas del día se extienden en una longitud de 40 centímetros, se observa desde luego que las dos direcciones opuestas de la componente vertical presentan cada una un régimen diferente, según el cual podemos clasificarlas en tres géneros : 1.°, las que presentan un registro vertical ascendente de carácter normal y descendente nulo ; 2.°, registro simultáneo, con algunas pequeñas diferencias de intensidad del uno respecto del otro, y 3.°, casos especiales, generalmente de escasa duración, en que se produce la corriente descendente y falta la ascendente o por lo menos tiene ésta una intensidad notablemente menor.

Atendida la pequeña velocidad media del viento en Granada (2), deducida de treinta años de registro anemocinemográfico, que es de 2,49 m/s., la mayor parte de las gráficas son del primer género y reflejan simplemente el fenómeno de convección que hace subir por la ladera del monte el aire caliente que procede del suelo inferior al emplazamiento del Observatorio.

---

(2) *El régimen del viento en Granada.* Revista de Geofísica A. II, núm. 1, página 82 y siguientes.

Las del segundo género se obtienen en días de ráfagas violentas, y entonces suelen sumarse dos factores que dificultan, en este aparato tan sensible, el estudio del fenómeno: la magnitud de las amplitudes registradas y la rapidez con que los torbellinos complican el trazado, si se tiene en cuenta la velocidad no excesiva del cilindro registrador. Acaso de estar colocado el registrador a mayor altura sobre el suelo, sería más fácil discernir en la gráfica los dos sentidos opuestos; pero por razones de orden práctico, se halla instalado a metro y medio de altura. Otros dos aparatos semejantes, de disposición más elemental, se encuentran a 15 metros de altura; su funcionamiento es por medio de contactos eléctricos, pero aun no es definitiva su instalación para registro.

Las gráficas de tercer género son sin duda las más interesantes; tiene lugar su registro en días de velocidad no excesiva del viento, generalmente al principio de una perturbación de las que preferentemente tienen lugar en primavera y para su estudio son un valioso auxiliar los restantes meteorogramas, que permiten reconstruir el proceso térmico-mecánico en las capas ínfimas de la atmósfera. Los casos analizados son 20, dos de ellos en marzo, ocho en abril, cuatro en mayo, tres en julio y dos en septiembre, con la circunstancia curiosa de que todos ellos coinciden con anormalidades, a veces notables, en la marcha de la presión atmosférica, temperatura, humedad y, sobre todo, dirección y velocidad del viento.

Comenzando por éste último, en todos los casos hay un cambio rápido de rumbo, que generalmente es superior a un cuadrante y en no pocos llega a dos; el viento que entonces se establece tiene la dirección antes indicada como favorable al funcionamiento del aparato. En cuanto a la temperatura y humedad, en la mitad de los casos experimentan la variación profunda que caracteriza el principio de la lluvia: descenso de temperatura y aumento de humedad; pero la corriente vertical descendente suele preceder una hora por término medio al comienzo de la precipitación. Paralelamente se observan anomalías en la curva barográfica, ya en forma de oscilaciones irregulares de corto período, ya de subidas o bajadas violentas, según el carácter de la perturbación a que acompaña; la hora del día en que ocurren estos fenómenos suele ser preferentemente el mediodía y comienzo de la tarde. La circunstancia más importante que conviene subrayar es que no todas las perturbaciones atmosféricas violentas, que han ocurrido en el espacio de tiempo estudiado, van acompañadas de esta corriente vertical,

aunque la dirección del viento fuera favorable; pero en cambio todos los registros de esa corriente descendente han sido precursores inmediatos de algún cambio notable, al contrario de lo observado con la ascendente.

Si se compara ahora la frecuencia media con que a lo largo de las veinticuatro horas del día se presentan las tres formas de corriente aérea registradas en el Observatorio de Cartuja, a saber: horizontal, vertical ascendente y vertical descendente, habrá que advertir desde luego que las tres curvas tendrán un valor estadístico muy desigual: la primera está fundada en registros diarios de treinta años, la segunda de cuatro y la tercera de uno sólo, acaso no completo por inevitables deficiencias iniciales en el funcionamiento del instrumento registrador; su comparación tiene, por tanto, un carácter provisional; y respecto de la última sólo es un avance preliminar (fig. 1). En las tres curvas coinciden sensiblemente

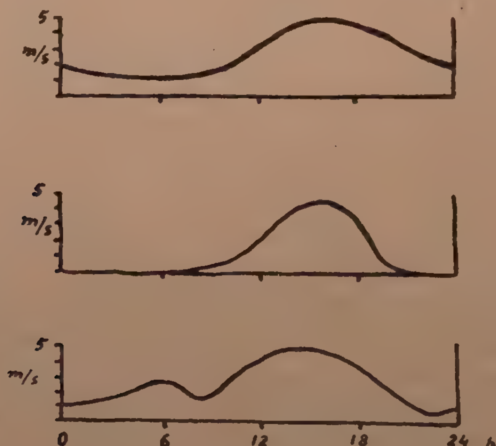


Figura 1

A) Curva de velocidad media del viento en Granada: componente horizontal.—B) Idem de frecuencia de la componente vertical en sentido ascendente.—C) Idem id. en sentido descendente.

los máximos de frecuencia; en la segunda aparece marcadísimo el ciclo semidiurno correspondiente a su origen, que es el calentamiento del suelo por los rayos del sol; y en la tercera hay un máximo secundario, precisamente en el tiempo de la temperatura mínima diaria, por ser precisamente el aire frío el principal agente del fenómeno estudiado. Tales son los primeros resultados, que un registro posterior más amplio podrá completar.

BIBLIOGRAFIA

LIBROS:

C. F. POWELL y G. P. S. OCHIALINI.—*Nuclear Physics in Photographs.*—Oxford University Press, London, 1947.

El estudio de los fenómenos nucleares es tema que constituye la apasionada devoción de la física actual. En los últimos años se han desarrollado las técnicas de un modo sorprendente y los libros y trabajos dedicados a la materia crecen en número y alcanzan en el aspecto teórico y práctico niveles extraordinariamente elevados. En la bibliografía quizás faltase un libro como el que reseñamos, en el cual los descubridores del mesón presentan de modo sorprendentemente simple y agradable los resultados obtenidos al producir los fenómenos nucleares en la emulsión fotográfica. Con arreglo a una técnica que describen en sus trazos generales, obtienen trayectorias en placas de emulsión especial. Una paciente búsqueda con ayuda del microscopio permite representarlas y estudiarlas. El texto breve, claro y conciso permite al lector interpretar las trayectorias sin lugar a dudas. En las fotografías del texto se han registrado los procesos principales y así puede verse en la emisión radioactiva de partículas pesadas, la interacción con átomos de la emulsión y desintegración de éstos, escisión de núcleos, desintegración producida por radiación cósmica, trayectorias de mesones y acción de éstos. El libro es interesante, no sólo por la importancia del método en sí mismo, sino porque constituye una ayuda imprescindible para todo el que estudie la física nuclear en la que los procesos y trayectorias están representados de modo extraordinariamente claro.

A. D.

M. EGÜES y P. JIMÉNEZ-LANDI.—*Oculares. Monografías de Ciencia Moderna.* Publicación número 1 del Instituto de Optica «Daza de Valdés». 1947.

Se proponen los autores de esta monografía una sistemática de los oculares, describiendo los tipos más importantes y dando las características que permite conocer la poca bibliografía que sobre el tema existe. La dificultad de la obra radica en que exactamente no se conocen los datos de muchos de los tipos descritos, ya que las patentes, fuentes bibliográficas fundamentales, ocultan ciertos datos y dan algunos, si no inexactos, por lo menos con una cierta aproximación que no permite muchas veces comprobar por cálculo algunas características que se dan como ciertas en ellas. Esta monografía comienza con unas breves nociones de Optica Geométrica y de aberraciones, principalmente de tercer orden, que permiten situar el problema al que está ya iniciado en el cálculo de sistemas ópticos. Describe a continuación los tipos principales de oculares, dando las características que pueden ser conocidas y cerrando el trabajo con una tabla general que resume lo expuesto anteriormente, intentando establecer una clasificación de los diversos tipos.

Para el que tenga que enfrentarse con el problema de proyectar un ocular puede servirle esta monografía de información importante que le evite la revisión de la bibliografía necesaria. La labor que se ha propuesto el Instituto de Optica tratando de llenar los huecos que existen en la escasa literatura óptica española es digna de aplauso y esperamos que continúe por el mismo camino y publique nuevas obras, de las que esta monografía es un alentador comienzo.

A. D.

REVISTAS:

Philosophical Magazine

Vol. 39. Núm. 288. Enero 1948.

H. B. Squire.—Reconsiderations of the theory of free turbulance (1).

P. A. Sinstein y L. Jacob.—On some focal properties of an electron optical immersion objective (20).

P. I. M. Dirac.—On the theory of point electrons (31).

E. H. Neville.—III. conditioned sets of linear equations (35).

A. H. Wilson.—A diffusion problem in which the amount of diffusing substance is finite (48).

A. J. G. Pippard.—The critical load of a battered column (58).

R. P. Lord.—A problem on random vectors (66).

C. Gurney.—The effective stress concentration at the end of a crack in materials having atomic constitution (71).

S. Paterson.—The compresion of a gas by a rigid piston moving in a closed rigid tube (76).

L. Silberstein.—The most probable colorimetric tensor derived from «n» colour matchings (82).

R. E. Burgess.—Theory of high pressure mercury vapor discharge (83).

Wang Mu-Hsie.—On the uniqueness of the accebration transformation (86).

Proceedings of the Physical Society

Vol. 60. Núm. 339. Marzo 1948.

L. F. Bates and E. G. Harrison.—The adiabatic temperature changes accompanying the magnetization of some ferromagnetic alloys in low and moderate fields (213).

L. F. Bates and E. G. Harrison.—The adiabatic temperature changes accompanying magnetization in low and moderate fields: A further study of iron (225).

R. Street.—The variation with magnetization of Young's modulus for cobalt (236).

K. W. Plessner.—The electric strength of dielectric films (243).

C. A. Coulson.—Excited electronic levels in conjugated molecules: I. Long wavelength ultra-violet absorption of naphtalene, anthracene and homologs (257).

H. C. Longuet-Higgins.—Excited electronic levels in conjugated molecules: II. On the symmetry and multiplicity of molecular states (270).

J. B. Birks.—The measurement of the permeability of low-conductivity ferromagnetic materials at centimetre wavelengths (282).

T. SMITH.—On perfect optical instruments (293).

E. N. DA C. ANDRADE.—A new device for maintaining constant stress in a rod undergoing plastic extension (304).

Letters to the Editor:

L. F. BATES AND J. H. DAVIS.—The effect of temperature on the heat changes accompanying magnetization of the nickel-silicon alloy W. 5 (307).

Vol. 60. Núm. 340. Abril 1948.

W. E. MOFFITT AND C. A. COULSON.—The electronic structure and bond lengths of coronene and pyrene (309).

C. C. DILWORTH.—The influence of surface films on the electrical behaviour of contacts (315).

B. DONOVAN.—The specific heat of a linear ionic lattice (325).

H. WILMAN.—The interpretation and application of electron-diffraction «Kikuchi-line» patterns - Part I. The determination of the chystal unit cell, its orientation and the chystal symmetry (341).

E. P. WOHLFARTH.—Thermoionic emission constants and band overlap (360).

H D. BUSH AND R. S. TEBBLE.U—The Barkhausen effect (370).

R. E. BELIN.—A radiosonde method for atmospheric potential gradient measurements (381).

MARJORIE WILLIAMSON.—A note on the Lecher wire method of measuring impedance (388).

N. F. MOTT.—Slip at grain boundaries and grain growth in metals (391).

Letters to the Editor:

B. BLEANEY AND R. P. PENROSE.—Paramagnetic resonance at low temperatures in chromic alum (395).

J. B. HASTED.—Milli-microsecond pulse generation by electron bunching (397).

Journal of Applied Physics

Vol. 19. Núm. 3. Marzo 1948.

W. W. MCCORMICK, L. MADANSKY Y A. F. FAIRBANKS.—Misroflash unit for ballistic photography (221).

J. HILLIER.—On the investigation of specimen contamination in the electron microscope (226).

J. R. RIERCE.—Possible fluctuations in electron stream due to ions (231).

L. B. ROBINSON.—Application of the Laplace transform in the solution of linear integral equations (237).

G. HOSE.—Response of linear resonant systems to excitation of frecuency varying linearly with time (242).

W. J. CUNNINGHAM.—Simple relations for calculating certain transient responses (251).

B. GROOS.—On creep and relaxation II (257).

E. W. KAUNER, T. E. PARDUE Y H. F. FRISSEL.—Determination of the elastic constants for Beta-Quartz (265).

C. E. HALL.—Dark-field electron microscopy (271).

S. S. PENNER.—Mass emissivity of powder gases in solid fuel rockets (278).

TING-SUI RÊ.—Viscous slip along grain boundaries and diffusion of zinc in alpha-Brass.

C. W. MACGREGOR, L. E. COFFIN Y J. C. FISHER.—Plastic flow of thick-walled tubes with large strains (291).

V. ROJANSKY.—Syrograms for simple harmonic systems subjected to external forces (297).

P. W. BRIDGMAN.—Large plastic flow and the collapse of hollow cylinders (302).

Journal of Scientific Instruments

Vol. 25. Núm. 2. Febrero 1948.

J. ROTBLAT, E. A. SAYLE Y D. G. A. THOMAS.—Scale-of-Hundred counting unit (33).

G. LIEBMANN.—A new experimental Electron Microscope (37).

E. L. DEACON.—Two types of sensitive recording cup Anemometer (44).

E. B. BROWN.—A supersensitive tachometer.

Vol. 25. Núm. 3. Marzo 1948.

F. C. BARKER.—Method of projected angles in cloud chamber measurements (65).

J. D. CRAGGS, W. BOSLEY Y A. A. JAFFE.—Some experiments with Geiger-Müller counters (67).

G. D. JONES Y C. A. SWENSON.—A one-print or «full» level indicator for use with low boiling-point liquids (72).

P. E. M. O'BRIEN.—The control of humidity by satured salt solutions (73).

C. MYLONAS.—The optical system of polariscopes as used in Photoelectricity (77).

W. C. COPELAN .—A mobile laboratory for acoustical work (82).

Journal of the Optical Society of America

Vol. 38. Núm. 1. Marzo 1948.

H. S. COLEMAN Y S. W. HARDING.—Loss in resolving power caused by primary astigmatism, coma and spherical aberration in telescopic system (217).

F. S. MCKINNEY Y R. A. FRIEDEL.—Calibration method for infrared prism spectrometers (222).

M. E. WISE Y H. A. KLASENS.—Fluorescence efficiency and hole migration in zinc sulphides (226).

M. A. BOUMAN Y H. A. VAN DER VELDEN.—Quanta explanation of vision and the brightness impression for various times of observation and visual angles (231).

S. Q. Duntley.—Visibility of distant objects (237).

H. S. Coleman y W. S. Verplanck.—Comparison of computed and experimental detection ranges of objects odewed with telescopic systems irom aboard ship (250).

W. S. Huxford y J. R. Platt.—Survey of near infrared communication systems (253).

H. S. Scryder y J. R. Platt.—Principles of optical communication systems (269).

O. H. Rank y J. S. McCartney.—Some spectral characteristic of mercury arcs for use in study of the raman effect (279).

A. E. Douglas y D. H. Rank.—Determination of the depolarization factors of highly polarized raman lines (281).

O. H. Ranse, J. S. McCartray y G. J. Izasz.—Intensity and polarization of Brillouin spectra (287).

Parry Moon.—Table of planckian radiation (291).

V REUNION ANUAL DE LA REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FISICA Y QUIMICA Y II DE LOS INSTITUTOS DE FISICA Y QUIMICA DEL CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

Sección de Física

ACTA DE LA SESION CELEBRADA EL DIA 27 DE ABRIL DE 1948

Bajo la presidencia del Sr. Otero se abre la sesión a las diez horas y treinta y cinco minutos.

El Sr. López Azcona expone un trabajo titulado «Estudio espectroquímico de aleaciones industriales a temperaturas variables», describiendo el método experimental consistente en el empleo de una cámara especial de altas temperaturas dispuesta sobre la bancada de un espectrógrafo con la cual se estudian las variaciones de las intensidades de las líneas espectrales: este trabajo ha sido realizado en colaboración con el Sr. Camuñas. Después da cuenta el señor López Azcona de un estudio titulado «Cálculo de la edad con la corrección por la pérdida de emanación», en el que se expone la forma de valorar las edades de los minerales radiactivos teniendo en cuenta el error debido a las pérdidas de emanación.

A continuación el Sr. González del Valle presenta una memoria sobre «La teoría general de redes con electrónica y sus aplicaciones al cálculo y gobierno automáticos. Tubos funcionales. Estudio especial del tubo hiperbólico-parabólico (bajo la acción de dos corrientes produce otra proporcional al cuadrado de la primera dividido por la segunda)», que constituye una nueva contribución a los estudios que está llevando a cabo. El Sr. Otero pregunta al Sr. González del Valle sobre la construcción práctica de tales tubos.

El Sr. Morais lee después los resultados de un estudio que ha realizado sobre las «Aberraciones de séptimo orden» aplicando un método—estudio de láminas planas—que ya había empleado para estudiar las aberraciones de quinto orden. El Sr. Otero resalta la importancia del tema recordando los trabajos de Seidel y Petzval en este sentido y termina agradeciendo al señor Morais su colaboración al Congreso.

A continuación el Sr. Otero, en su nombre y en el de los Sres. Ríos y Plaza, da cuenta de un trabajo realizado en colaboración y que lleva por título «Contribución de la aberración de apertura monocromática a la miopía nocturna»; el resultado de las experiencias realizadas es que la ametropía nocturna apenas cambia su valor para toda la gama de aperturas pupilares tendiendo la pequeña variación a disminuir la miopía nocturna conforme aumenta el diámetro pupilar.

Finalmente, la Srta. Mercedes Cubero, en su nombre y en el del Sr. Brú, expone los resultados de su trabajo sobre las «Analogías entre la difracción de la luz y de los rayos X. II», con el cual comienzan las investigaciones que tienen proyectadas acerca del microscopio de rayos X de Bragg.

Se levanta la sesión a las doce horas y catorce minutos.

ACTA DE LA SESION CELEBRADA EL DIA 28 DE ABRIL DE 1948

Bajo la presidencia del Sr. Brú se abre la sesión a las diecisiete horas y quince minutos.

Comienza el Sr. Casas exponiendo un trabajo, que ha realizado en cola-

boración con el Sr. Morais, sobre «La distribución de la luz en un plano de frente en presencia de la aberración esférica de tercer orden».

A continuación el Sr. Plaza, en su nombre y en el del Sr. Otero, da cuenta de un «Nuevo método de precisión para determinar índices de refracción por inmersión de lentes o piezas acabadas», con el cual se alcanza una gran precisión; la igualación de índices de la pieza y del líquido se comprueba interferencialmente y la medida se realiza con un goniómetro empleando para ello una cubeta prismática.

A continuación el Sr. Ortiz presenta su trabajo «Sobre una propiedad de los operadores estadísticos. Proyecciones del operador estadístico de un sistema compuesto sobre los sistemas componentes»; en este trabajo el Sr. Ortiz rectifica una demotración errónea aparecida en el libro de J. von Neumann «Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (págs. 229, 231). Después el Sr. Ortiz expone un estudio que ha realizado sobre «Densidades escalares y leyes de conservación», en el cual ha generalizado la relación que expresa que en cualquier espacio riemanniano o pseudorriemanniano la derivada hamiltoniana en el sentido de Eddington de un invariante fundamental es un tensor cuya divergencia se anula idénticamente.

Se lee después una nota del P. Dúe sobre «La componente vertical descendente del viento en Granada», en la cual se resumen los primeros resultados obtenidos con un nuevo anemógrafo vertical construído en el Observatorio de Cartuja.

Pasa después el Sr. Otte a dar cuenta, en su nombre y en el del Sr. Sánchez Serrano, de su trabajo sobre «La mecánica cuántica y sus relaciones con la Biología». El Sr. Brú, a propósito de esta memoria, pone de manifiesto el interés que tiene la colaboración entre la Física y la Biología.

Después el Sr. Sánchez del Río da cuenta de un estudio que ha realizado, con el título de «Generalización del concepto de isoplanasía», en el cual, parte del concepto de estabilidad de los círculos de mínima dispersión. También presenta una segunda «Nota sobre la relación entre el poder separador de un instrumento óptico y el umbral diferencial del sistema perceptor»; se ofrece una tabla de valores que liga ambas magnitudes.

El Sr. Durán expone, en su nombre y en el del Sr. Morais, un «Estudio del objetivo apocromático», considerando los criterios más convenientes para la elección de los vidrios de manera que puedan obtenerse las focales más convenientes para las lentes que constituyen el objetivo.

Después el Sr. Navarro Alcácer da cuenta de un «Estudio de bentonitas y caolinitas nacionales», que ha llevado a cabo en colaboración con el señor Martínez-Cros.

El Sr. Morais presenta una memoria sobre «Un nuevo método para la comprobación de rayos oblicuos cualesquiera», dando además los esquemas de cálculo que pueden aplicarse para simplificar el problema.

Termina la Srta. Vigón dando cuenta, en su nombre y en el del Sr. Segovia, de un trabajo sobre «Contadores Geiger».

Se levanta la sesión a las veinte horas y treinta y ocho minutos.

ACTA DE LA SESION CELEBRADA EL DIA 29 DE ABRIL DE 1948

Bajo la presidencia del Sr. Baltá se abre la sesión a las diez horas y veintidós minutos.

El Sr. García Abrines, en su nombre y en el del Sr. García Santesmases, da cuenta de un trabajo titulado «Medida de la amplificación del microscopio electrónico: Curvas de calibrado», y en el cual explica los procedimientos empleados para calibrar el microscopio electrónico del Instituto de Optica «Daza de Valdés».

Después el Sr. Mañas, en su nombre y en el del Sr. García Santesmases, expone un «Estudio teórico y experimental de algunos circuitos de derivación e integración»; ha realizado un estudio teórico de los diversos circuitos deter-

minando para cada tensión, frecuencia y forma los parámetros para la mejor utilización de aquéllos. Responde asimismo el Sr. Mañas a una pregunta del Sr. Baltá sobre la clase de condensadores utilizados. A continuación el señor Mañas, también en su nombre y en el del Sr. García Santesmases, lee una memoria sobre las «Aplicaciones del microscopio electrónico a la Bacteriología», describiendo brevemente las técnicas de la microscopía electrónica empleados en aquella ciencia.

Después el Sr. Martínez Ferigle, en su nombre y en el del Sr. Mañas, da cuenta de un estudio sobre la «Sensibilidad de las emulsiones fotográficas a la acción de los electrones»; han obtenido las curvas de sensibilidad relativa y determinado el tipo de emulsión más aconsejable en cada caso.

A continuación el Sr. Castilla da cuenta de un trabajo titulado «Producción de energía nuclear y transformación de isotopos». El Sr. Baltá pregunta sobre el error de unas fórmulas de la obra de Heitler a las cuales se ha hecho referencia. La Srta. Vigón hace algunas observaciones sobre la conservación del spín en los procesos que propone el Sr. Castilla.

El Sr. Villena, en su nombre y en el del Sr. Föppl, da cuenta de un trabajo titulado «Estudio fotoelástico de rótulas a compresión», en el cual se dan los resultados obtenidos en la fase inicial del estudio fotoelástico del problema.

Finalmente, el Sr. González del Valle expone en líneas generales un trabajo del Sr. Sánchez-Cordovés sobre la «Teoría general de redes con electrónica y sus aplicaciones al cálculo y gobierno automáticos. Utilización de la técnica de modulación de frecuencia en las calculadoras electrónicas».

Se levanta la sesión a las doce horas y veintidós minutos.

Sección de Química Física y Química Inorgánica Pura y Aplicada

ACTA DE LA SESION CELEBRADA EL DIA 27 DE ABRIL DE 1948

Se abre la sesión a las diez horas y quince minutos bajo la presidencia del Prof. Dr. Brú, actuando como secretario el Sr. García Banda.

El Sr. Aleixandre, en nombre de J. M. Albareda, C. Sánchez Calvo, y en el suyo propio, da cuenta de un trabajo acerca de *Contribución al estudio de las pizarras españolas del silúrico* (13).

El Sr. Aleixandre, en nombre de J. García Vicente y en el suyo propio da cuenta del trabajo *Estudio físico químico de algunos silicoaluminatos artificiales* (14).

El Sr. A. Guerra, en nombre de J. M. Albareda, F. Burriel y en el suyo propio, da cuenta del trabajo *Estudio de las razones moleculares sílice sesquióxidos y sílice alúmina en las arcillas de suelos de climas húmedos españoles y sus dependencias con factores químicos y físico-químicos* (15).

El Sr. Colomina, en nombre de E. Primo y A. Caridad, da cuenta de un trabajo titulado *Un nuevo tipo de manostato* (22).

La Srta. María D. Astudillo da cuenta de los siguientes trabajos: *Preparación de radioyodo I^{128} y I^{131}. Síntesis de compuestos con aplicación a Biología y Medicina. Valoración y dosificación* (23).

Preparación de radiofósforo P^{32}. Síntesis del $H_3P^{32}O_4$ y del $Na_2HP^{32}O_4$. Valoración radioquímica y Preparación de inyectables (24).

Preparación de radiocinc Zn^{65}. Síntesis del $Zn^{65}(NO_3)_2$ y del $Zn^{65}S$. Valoración radiactiva y dosificación (25).

Preparación de radiohierro Fe^{55} y Fe^{59} (26).

El Sr. García Martín da cuenta de un trabajo titulado *Sobre la sustitución del Vocablo «Metaloide» por otro más propio* (11).

A las doce horas y cinco minutos se levanta la sesión.

ACTA DE LA SESION CELEBRADA EL DIA 28 DE ABRIL DE 1948

Se abre la sesión a las dieciocho horas cuarenta y cinco minutos, bajo la presidencia del Prof. Dr. González Carreró, actuando como Secretario el doctor Gómez Herrera.

El Sr. Terol, en nombre de A. Ríus y en el suyo propio, da cuenta del trabajo *Diferentes tipos de polarización anódica del platino* (27).

El Sr. Ríus, en nombre del Sr. Polo y en el suyo propio, expone el trabajo *Sobre la relación entre el potencial y la intensidad en un electrodo activo* (28).

El Sr. Calleja expone el trabajo *Corrosión y comportamiento anódico del hierro y los aceros en ácidos diluidos* (29).

El Sr. Morcillo, en nombre de O. R. Foz, J. M. Vidal y en el suyo propio da cuenta del trabajo *Técnica experimental para la determinación de coeficientes del virial de vapores a presiones próximas a la atmosférica.* Después de una exposición de los antecedentes experimentales acerca de las medidas de densidad de vapores realizadas en distintas condiciones de presión, volumen, temperatura y masa de sustancia empleada, con miras a la determinación del coeficiente del virial, describe un aparato diseñado con tal objeto. Este ha sido ensayado con metanol y se obtiene una precisión en el resultado final superior a la exigida por los mejores especialistas críticos del método.

(Este resumen sustituye al publicado en el folleto, editado con motivo del Congreso, señalado con el número 30.)

El Sr. García Banda, en nombre de O. R. Foz y M. Colomina, y en el suyo propio, da cuenta del trabajo *Variación de la conductividad calorífica con la presión en vapores de metanol, etanol, benceno y agua* (31).

El Sr. Nicolás, en nombre de M. Colomina y en el suyo propio, da cuenta del trabajo *Calores de disolución y dilución del clorato y perclorato sódicos en toda la gama de concentración y cálculo de las magnitudes con ellos relacionadas* (32).

El Sr. Pérez Rodríguez, en nombre de L. Brú, V. Cortés y en el suyo propio, da cuenta del trabajo *Medida de conductividades mediante un impulso de tensión utilizando un ojo mágico como aparato de cero* (33)

El Sr. Otero Aenlle, en nombre de R. Cadorniga Carro, S. Pomares y en el suyo propio, da cuenta del trabajo *Capacidad humectante y poder espumógeno de las sales alcalinas de algunos ácidos grasos. Su relación con la actividad capilar y el estado de las soluciones* (36).

El Sr. Gómez Herrera, en nombre de A. Zoido y en el suyo propio, da cuenta del trabajo *Electroquímica de los conductores de núcleo* (34).

A las veinte horas y cincuenta y cinco minutos se levanta la sesión.

ACTA DE LA SESION CELEBRADA EL DIA 29 DE ABRIL DE 1948

A las diez horas y veinte minutos, bajo la presidencia del Prof. Dr. Albareda y actuando como Secretario el Dr. Colomina, se abre la sesión.

El Sr. Otte, en nombre de E. Sánchez Serrano y en el suyo propio, expone el trabajo *Aplicación de los neutrones en Medicina. I. Obtención, dosificación, protección* (35).

El Sr. Ara da cuenta del trabajo *Influencia del CNK en la catálisis de la descomposición del H_2O_2 por un electriplatinsol* (38).

El Sr. Tomeo da cuenta de un trabajo realizado en colaboración con los señores C. S. Aguilar y F. Dueso, con el título de *El problema agrícola del nitrógeno. II.* (39).

El Sr. Sánchez Serrano da cuenta de un trabajo acerca de *Ionización auxiliar por sustancias radiactivas, en las descargas eléctricas para espectrografía* (40).

El Sr. Alvira expone el trabajo *Constitución química y mineralógica de las arcillas en distintos tipos de suelos del Marruecos español* (42).

El Sr. Alvira da cuenta de un trabajo realizado en colaboración con M. Alía Medina cuyo título es *Estudio químico geológico de un suelo salino de la sebja de ougranat* (*Sahara español*) (43).

El Sr. Cruz Rodríguez, en nombre de J. M. Albareda y en el suyo propio da cuenta de un trabajo cuyo título es *Los fenómenos de superficie en la manifestación de anisotropía en las suspensiones acuosas de arcilla* (44).

El Sr. García Vicente, en nombre de V. Aleixandre y en el suyo propio expone el trabajo *La variación de las propiedades físico-químicas de las arcillas con el tamaño del grano* (16).

A las doce horas se levanta la sesión.

Nota.—En la Sección de Química Física no se han presentado los trabajos siguientes: núms. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 17, 18, 19 y 37.

Se han presentado en la Sección de Física los trabajos que aparecían en la de Química Física con los números 20 y 21.

Sección de Química Orgánica Pura y Aplicada y Química Biológica

ACTA DE LA SESION DEL DIA 27 DE ABRIL DE 1948

Se abre la sesión a las diez de la mañana en la sala de Conferencias de los Institutos «Alonso Barba» y «Alonso Santa Cruz», bajo la presidencia del Profesor Dr. Lora Tamayo, actuando de Secretarios los Sres. Ballester y Pérez A. Ossorio.

El Presidente concede la palabra al Prof. Viguera, quien en su nombre y en el del Sr. Castellote, da cuenta del trabajo titulado «Pérdida de vitamina C en jugos de diversos tipos de naranjas durante su almacenamiento».

Al terminar la exposición de este trabajo el Prof. Lora cede la Presidencia al Prof. Dr. Rivas Marqués, quien la ocupa hasta el final de la sesión.

El Sr. Rodríguez Muñoz resume un trabajo titulado «Las hemicelulosas del endospermo de semillas del género *Gleditschia*». A continuación el Sr. Santapau, en nombre propio y en el del Dr. Primo, expone una comunicación sobre «Recuperación de alcaloides de la Atropa Belladona por cambio de ión». El señor Serrano, en nombre del Prof. Dr. Perelló, da cuenta del trabajo titulado «Los antibióticos de tipo sulfonamídico y el crecimiento de las plantas»; y a continuación, en el suyo propio, de otro sobre «Contribución al estudio de la formación de nicotina en Nicotiana». El Dr. Martínez Moreno expone un trabajo hecho en colaboración con la Srta. Crespí sobre «Datos de solubilidad en el sistema: Acido oleico-aceite de oliva-sulfuro de carbono-metanol». El señor Ortuño, en su nombre y en el del Prof. Dr. Soler, explica los resultados de un trabajo sobre «Contribución al estudio del metabolismo de algunos hongos frente a substratos pectínicos». El Dr. Panizo lee el resumen de un trabajo del Profesor González y González y del Sr. Calero titulado «Contribución al estudio del látex de las euforbias. I. Látex de la *Euforbia Canariensis*». Finalmente, el señor Quiroga, en su nombre y en el del Dr. Infiesta, expone una comunicación «Acerca del mejoramiento de los adhesivos fenólicos».

Se levanta la sesión a las doce y diez de la mañana.

ACTA DE LA SESION DEL DIA 28 DE ABRIL DE 1948

Bajo la presidencia del Prof. Dr. Ipiens Lacasa se abre la sesión a las seis y media de la tarde en el mismo local, y actuando de Secretarios los mismos señores que en la sesión anterior.

El Dr. Infiesta da cuenta de un trabajo verificado en colaboración con el Sr. Achón titulado «Perfeccionamiento en columnas de rectificación tipo Laboratorio». A continuación el Sr. Achón, en su nombre y en el del Dr. Infiesta, expone una comunicación sobre «Poliorganosiloxanos por el método directo. I. Obtención del clorometilsilanos». El Sr. Martín Guzmán, en nombre propio y en el del Dr. Infiesta, resume un trabajo sobre «Poliorganosiloxanos por el método Grignard. I. Sobre la preparación del cloruro de metilmagnesio». El Profesor Lora explica los resultados obtenidos en un trabajo en colaboración con el Sr. Fontán sobre «Conjugación de un doble enlace con un núcleo aromático. XVIII. Acción de la p-benzoquinona sobre la conjugación $C_6H_5—N=C$»; a continuación da cuenta de otro trabajo realizado con el Sr. González Ramos titulado «Sobre la síntesis del ácido o-cianhidrocinámico».

El Prof. Ipiens cede la Presidencia al Prof. Dr. Tomeo, quien la ocupa durante el resto de la sesión.

El Sr. León expone en su nombre y en el del Prof. Lora una comunicación sobre «Conjugación de un doble enlace con un núcleo aromático. XVII. Dienometrías con p-benzoquinona». El Sr. Pérez A. Ossorio, en nombre propio y en el del Prof. Lora, expone a continuación un trabajo sobre «Conjugación de un doble enlace con un núcleo aromático. XIX. Síntesis en la serie de los ácidos fenilalilsuccinicos». Finalmente, el Sr. Ramón da una comunicación titulada «Sobre la síntesis del benzoil y 2-naftoilcarbinol (nota experimental)».

Terminada la exposición de este trabajo se levanta la sesión a las ocho y veinte.

ACTA DE LA SESION DEL DIA 29 DE ABRIL DE 1948

Se abre la sesión a las diez y media bajo la presidencia del Prof. Dr. Lora Tamayo en el mismo local y actuando de Secretarios los mismos señores que en las sesiones anteriores.

El Sr. Presidente advierte la necesidad de abreviar en la exposición de las comunicaciones científicas debido al gran número de ellas que quedan para dar cuenta en esta última sesión; seguidamente cede la presidencia al Prof. Dr. Pascual Vila.

El Dr. Villar Palasí da cuenta de tres comunicaciones tituladas «Estudio sobre bioquímica de prótidos. I. Aminoácidos básicos de la semilla del *Lathyrus sativus*», «II. Aminoácidos aromáticos básicos de la semilla del *Lathyrus sativus*» y «III. Aminoácidos del grupo de la leucina e hidroxiaminoácidos de la semilla del *Lathyrus sativus*» verificadas todas ellas con el Prof. Dr. Santos Ruiz y con la Srta. Archilla Guzmán la primera, con la Srta. Sanz Domínguez la segunda y con la Srta. Andrés Irigoyen la tercera. A continuación, el Sr. Sanz Muñoz, en nombre del Prof. Dr. Santos Ruiz y del Sr. Rotllant de Franch, lee un resumen del trabajo «Química del látex de la *Euphorbia Equina*». El señor Pérez A. Ossorio lee un resumen del trabajo del Dr. Monche titulado «La estructura de los 2-sulfanilamido-4-(alcohil o aroil-tiazoles». El Prof. Dr. Otero Aenlle, en nombre propio y en el del Sr. Varela Núñez da cuenta de una comunicación sobre «Permeabilidad de los films de aceite de sardina». El Sr. Domínguez expone un trabajo verificado en colaboración con el Prof. Dr. Ribas Marqués titulado «Sobre el aceite de cornezuelo. I. El elevado índice de hidróxilo (o de acetileno) de este aceite y su contenido en ácido ricinoleico». El Profesor Dr. Gómez Aranda resume las conclusiones de su trabajo «Las propiedades físicas de los compuestos homólogos». El Sr. Dolado, en nombre propio y en el del Prof. Dr. Tomeo, da cuenta del trabajo «Estudios sobre la serie terpénica. IV. Obtención de terpinoleno».

El Prof. Pascual Vila cede la Presidencia al Prof. Dr. Santos Ruiz, quien la ocupa hasta el final de la sesión.

A continuación la Srta. Pilar Rifé da cuenta de un trabajo verificado con el Prof. Dr. Ríus Miró sobre «Reacción del ácido hipocloroso con el ácido abiético». El Sr. Ballester, en nombre del Prof. Pascual Vila y en el suyo propio,

resume el trabajo titulado «Condensación de ortoésteres y grupos metileno activados. IV. Acción del pseudodimetiléster ftálico sobre el dinitrilo malónico. El Sr. Sánchez Real, en su nombre y en el del Prof. Pascual, expone una comunicación sobre «Obtención de los ácidos γ-benzoil y p-toluilbutíricos. Derivados del ácido γ-bromo-γ-benzoil-butírico».

El Sr. Salazar, en nombre propio y en el del Dr. Mora, resume un trabajo titulado «Valor analítico del punto de inflamación en los aceites lubricantes». El Dr. Izu da cuenta de una comunicación sobre «Rectificación experimental de las curvas de absorción en el U. V. de hidrocarburos aromáticos», y a continuación, de otras dos verificadas en colaboración con los Dr. Vian y Mora la primera y con el Dr. Vian la segunda, tituladas «Contribución al conocimiento de las transformaciones que experimentan los hidrocarburos por efecto de la voltólisis» y «Contribución al conocimiento del mecanismo de la polimerización voltolítica y de la constitución de los glicerovoltoles». El Dr. Blasco, en nombre del Sr. Prieto y en el suyo propio, resume un trabajo titulado «Refino de gasolinas con anhídrido maleico». Al terminar la exposición de este trabajo, los Profres. Pascual y Lora solicitan aclaraciones a algunos puntos del mismo, que son contestadas por el Dr. Blasco. Finalmente, el Dr. Sistaré, en nombre del Prof. Pascual y en el suyo propio, da cuenta de una comunicación sobre «Acidos ciclohexanol-carbónicos 1,2.—II.»

Terminada la exposición de las comunicaciones científicas se levanta la sesión a las doce y cuarto de la mañana.

Sección de Química Analítica Pura y Aplicada

ACTA DE LA SESION CELEBRADA EL DIA 27 DE ABRIL DE 1948

En la Sala de Reuniones del Instituto Español de Edafología, Ecología y Fisiología Vegetal tuvo lugar, a las diez de la mañana del citado día, la primera reunión para dar cuenta de las comuicaciones presentadas, bajo la presidencia de D. Ricardo Montequi y actuando de Secretarios los Sres. Barcia y Alvira. En este día se presentaron las siguientes comunicaciones:

El Sr. D. Manuel Muñoz Taboadela, presenta un trabajo en colaboración con los Sres. Albareda y Burriel, sobre «Determinaciones de Manganeso en tierras negras españolas»; al finalizar la exposición, el Sr. Montequi pide algunas explicaciones al método del peryodato en comparación con el del persulfato, que son debidamente contestadas por el Sr. Taboadela. El Sr. Montequi indica la coincidencia en la elección de este método con el que está empleando en su laboratorio.

El Sr. Burriel da cuenta de dos trabajos, hechos en colaboración con el señor Pino, sobre «Aplicación de la técnica cromatrográfica al análisis cualitativo de trazas de níquel. III. Reacciones sobre sólidos», y «La dimetilglioxima como indicador de análisis volumétrico. Nuevas aplicaciones». El Sr. Barcia pregunta si la influencia del ión ferroso en el primer trabajo es manifiesta. El Sr. Burriel aclara las interferencias a la determinación del Ni con algunos ejemplos.

La Srta. Carretero expone un trabajo hecho en colaboración con el Prof. Burriel, sobre «Los indicadores de adsorción en volumetría de doble precipitación. Nota I, estudio del sistema volumétrico $BaCl_2+Ag_2SO_4$.

El Sr. Rodríguez Pérez expone un trabajo hecho en colaboración con el Profesor Burriel sobre «Relaciones entre los resultados del análisis cuantitativo espectral de algunas aleaciones a base de Pb y el de sus sales respectivas».

El Sr. Hernando expone dos trabajos hechos en colaboración con el Sr. Burriel, sobre «Sobre la determinación del fósforo en algunos aceros especiales» y «Sobre la determinación del fósforo en los suelos. Nota III».

El Sr. Burriel expone un trabajo, hecho en colaboración con el Sr. González Batista, sobre «Los indicadores de oxi-adsorción en la volumetría de sul-

fatos». El Sr. Ramírez pregunta si la valoración ya se ha hecho en presencia de nitratos, contestando el Sr. Burriel que hasta ahora sólo se ha estudiado el problema de la valoración volumétrica del ácido sulfúrico. El Sr. Montequi, después de felicitar al Sr. Burriel por su comunicación, pide algunas aclaraciones sobre la influencia del ferricianuro sobre el sulfato de bencidina, que son contesadas cumplidamente por el Sr. Burriel.

El Sr. Poggio expone un trabajo, efectuado en colaboración con la Srta. María Martín Retortillo, sobre «Distinción espectral de los aceites de oliva de presión y de extracción por disolventes». El Sr. Montequi pregunta si han estudiado otros aceites, y el Sr. Poggio indica que tienen iniciados trabajos en los cuales se estudian aceites de sardinas.

El Sr. Ríus expone un trabajo realizado con la Srta. Molera sobre «Análisis polarográfico del platino con el electrodo de vena de mercurio».

El Sr. Sáenz Bretón da cuenta de una comunicación realizada en colaboración con el Sr. Poggio «Sobre la posibilidad de emplear el electrodo soporte como elemento de referencia en los análisis espectrales de disoluciones». El P. Andrés Rodríguez pide algunas aclaraciones sobre la curva expuesta por el Sr. Sáenz, así como sobre los errores cometidos en sus determinaciones. Después de una larga discusión sobre este trabajo, en la cual toman parte los Sres. Poggio, Burriel y Camuñas, se finaliza este intercambio de ideas con unas palabras del Sr. Montequi, indicando que todos debemos felicitarnos, ya que estas discusiones denotan el interés científico de las comunicaciones presentadas.

ACTA DE LA SESION CELEBRADA EL DIA 28 DE ABRIL DE 1948

El Sr. Ramírez presenta un trabajo hecho en colaboración con el Sr. Burriel sobre «La tintura de ancusa como indicador en las volumetrías de neutralización».

La Srta. Narcisa Martín Retortillo presenta un trabajo sobre «Determinación de humus por los métodos: fotométrico y del bromuro de acetilo».

El Sr. Gómez Ruimonte da cuenta de una comunicación titulada «Valoración del Mo en Aceros».

El Sr. Vioque expone un trabajo hecho en colaboración con el Sr. Gracián sobre «Microvaloración de ácidos grasos». El Sr. Burriel pregunta qué tipo de bureta ha empleado para manejar la sosa a esa débil concentración y los errores cometidos, lo que es contestado debidamente por el Sr. Vioque. El Sr. Montequi pregunta el objeto del trabajo que se ha estudiado, indicando el Sr. Vioque que se ha realizado para caracterizar las fracciones que se obtienen en la columna cromatográfica de los ácidos grasos.

El Sr. Gracián da cuenta de un trabajo realizado con la colaboración del Sr. Quirós sobre «Estudio potenciométrico de la curva de neutralización de vinos. Nota I.

El Sr. Capón da cuenta de un trabajo hecho en colaboración con el Sr. Ribas sobre «El empleo de la asociación «Selenio-ásido perclórico» en la determinación cuantitativa del nitrógeno según el método de Kjeldahl». El Sr. Burriel pregunta los errores que obtienen, lo que es aclarado por el Sr. Capón.

El Sr. Barcia Goyanes da cuenta de un trabajo en colaboración con el señor Sánchez Serrano sobre «Métodos radiactivos en Química. II. La absorción de partículas α del Th^{232}, como método de análisis».

ACTA DE LA SESION CELEBRADA EL DIA 29 DE ABRIL DE 1948

El Sr. Bosch presenta una comunicación con la colaboración del Sr. Alvarez Querol, sobre el tema «Sobre la valoración bromométrica del nitrógeno». El señor Burriel hace algunas consideraciones que son aclaradas por el señor Bosch.

El Sr. Portillo expone un trabajo hecho con el Sr. Ortega sobre «Estudios polarográficos con el electrodo de gotas de Heyrovsky. VI. El índice de proteínas en sueros humanos.

La Srta. Sara Borrell presenta un trabajo cuyo tema es «Estudio de algunas constantes físicas de la leche y su aplicación a la fiscalización bromatológica».

El Sr. Burriel presenta una comunicación hecha en colaboración con el señor Suárez sobre «Nueva valoración de nitritos por colorimetría indirecta. Nota II.»

El Sr. Casares Gil presentó «una nota sobre la fluorhidrina de Landolt».

El Sr. Lucena presenta dos trabajos en colaboración con el Sr. Burriel sobre «Aplicaciones analíticas de la valoración de sales ferrosas en presencia de iones sulfocianicos. Nota III. El sufocianuro como indicador en la valoración conjunta de iones ferrosos y férricos y ferrosos y titanosos» y «Aplicaciones analíticas de la valoración de sales ferrosas en presencia de iones sulfociánicos. Nota IV. Contribución al estudio de la reducción de sales férricas con ácido sulfuroso con fines analíticos. Acción catalítica de los iones sulfociánicos y sus aplicaciones.»

El Sr. Sierra expone un trabajo en colaboración con el Sr. Monllor sobre «Explicación del color de algunos preparados de interés analítico por una acción catalítica seguida de adsorción».

SERVICIO DE BIBLIOTECA Y FOTOCOPIAS

Reorganizada la Biblioteca en magníficos locales, que permiten el trabajo cómodo de los socios que deseen consultar las revistas o libros de la misma, la Junta directiva de esta Real Sociedad expresa el acuerdo, hace años tomado en bien de la buena marcha de la Biblioteca, de no permitir sacar de la misma ningún ejemplar por no tenerlos duplicados y evitar el deterioro de las revistas y libros.

Estará abierta todos los días laborables de 10,30 a 13,30 y de 16 a 18 horas, excepto los sábados por la tarde. Para informes llamar al teléfono 23-80-96.

Para los señores socios, especialmente de provincias, que no puedan acudir a la misma, se ha establecido el servicio de fotocopias de trabajos originales de Física y Química publicados en libros y revistas existentes en la Biblioteca de esta Real Sociedad y la del Instituto Nacional de Física y Química. Por este servicio esta Real Sociedad sólo exige el abono de los gastos que ocasiona el material empleado en la obtención de la fotocopia. El precio de la fotocopia de 18 x 13 cm. es de cuatro pesetas.



Nuevas Gráficas, S. A.-T.° 233029